

Universitatea "Ovidius" din Constanța
Institutul Studiilor Doctorale

Teză de doctorat

CONDUCĂTOR DE DOCTORAT:

Prof. Univ. Dr. Elena Luminița Cosma

STUDENT DOCTORAND:

Ioan-Vladimir Vîntu

2025

Universitatea "Ovidius" din Constanța
Institutul Studiilor Doctorale

Rezumat

Contributions to the Study of Evolution
Inclusions in Hilbert Spaces

CONDUCĂTOR DE DOCTORAT:

**Prof. Univ. Dr. Elena Luminița
Cosma**

STUDENT DOCTORAND:

Ioan-Vladimir Vîntu

COMISIA DE ÎNDRUMARE ȘI INTEGRITATE ACADEMICĂ

Prof. Univ. Dr. Constantin Costara

Conf. Univ. Dr. Maria Gabriela Badea

Conf. Univ. Dr. Alexandru Bobe

Cuprins

Introducere	1
Partea I: Incluziuni de evoluție în spații Hilbert cu parametri	4
1 Incluziuni de evoluție cu doi parametri	5
Partea a II-a: Probleme la limită cu condiții antiperiodice și parametri în spații Hilbert	10
2 Asupra unor incluziuni de evoluție cu parametru și condiții antiperiodice	11
3 Incluziuni de evoluție cu doi parametri și condiții antiperiodice	16
4 Probleme cu condiții la limită antiperiodice guvernate de operatori maximal monotoni	24
Bibliografie selectivă	26

Introducere

Studiul incluziunilor de evoluție neliniare în spații Hilbert reprezintă un subiect central în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, datorită atât importanței sale teoretice, cât și aplicabilității acestora într-un număr mare de domenii, de la mecanică și teoria controlului optimal, până la sisteme de tip reacție-difuzie și propagarea undelor. Printre cele mai importante instrumente utilizate în acest domeniu se numără metodele de monotonie, dezvoltate semnificativ pentru a studia incluziuni diferențiale asociate operatorilor maximal monotoni, eventual perturbați prin termeni nemonotoni.

Această teză este dedicată studiului a două clase de probleme la limită neliniare de ordinul al doilea, formulate în spații Hilbert reale. Incluziunile de evoluție asociate sunt guvernate de operatori maximal monotoni și includ perturbații neliniare de diverse tipuri, precum termeni nemonotoni, operatori Lipschitz sau termeni subliniari.

Primul capitol al tezei are un caracter introductiv și este împărțit în mai multe secțiuni: *Context și motivație*, *Lucrări relevante*, *Obiectivele tezei*, *Structura tezei* și *Contribuții științifice și diseminare*. Acesta este urmat de un capitol de *Preliminarii*, în care sunt prezentate noțiunile și rezultatele clasice pe care le vom utiliza, grupate în trei secțiuni: *Spații de funcții*, *Câteva instrumente abstracte* și *Operatori maximal monotoni*.

Lucrarea este structurată în două părți, ambele conținând contribuții originale ale autorului. *Partea I: Incluziuni de evoluție în spații Hilbert cu parametri* corespunde Capitolului 1 al acestui rezumat, iar *Partea a II-a: Probleme la limită cu condiții antiperiodice și parametri în spații Hilbert* cuprinde Capitolele 2, 3 și 4. Rezultatele prezentate în acest rezumat sunt date fără demonstrații, însă sunt indicate metodele utilizate.

Teza se încheie cu un capitol în care sunt sintetizate principalele obiective atinse. De asemenea, sunt conturate câteva direcții de cercetare viitoare, dintre care amintim extinderea cadrului abstract la spații Banach, studiul incluziunilor diferențiale cu perturbații nemonotone și analiza comportamentului soluțiilor în cazul relaxării ipotezelor asupra operatorilor care intervin în incluziunile de evoluție considerate.

Pentru claritate și concizie, acest rezumat extins nu include titluri de secțiuni sau subsecțiuni, oferind totuși o prezentare completă a rezultatelor obținute în fiecare parte a tezei. Referințele bibliografice menționate sunt selectate strict în funcție de conținutul prezentat, iar lista completă de lucrări poate fi consultată în varianta integrală a tezei.

Restul acestui capitol este dedicat prezentării unor lucrări relevante din literatură, prin care sunt punctate contribuțiile acestei teze în raport cu studiile existente.

Începem prin formularea precisă a primei clase de probleme analizate în Partea I. Aceasta include problemele la limită cu condiții de tip Dirichlet–Neumann:

$$(P_{\varepsilon\mu}) \begin{cases} -\varepsilon u''(t) + \mu u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t) & \text{a.p.t. } t \in (0, T) \\ u(0) = u_0, \quad u'(T) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (E_{\varepsilon\mu}) \\ (BC) \end{matrix}$$

unde $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$ sunt doi parametrii. Pentru $\mu > 0$, modelul redus corespunzător este problema Cauchy

$$(P_{\mu}) \begin{cases} \mu u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t) & \text{a.p.t. } t \in (0, T) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (E_{\mu}) \\ (IC) \end{matrix}$$

Considerăm de asemenea incluziune algebrică neliniară:

$$(E_{00}) \quad Au(t) + Bu(t) \ni f(t) \quad \text{a.p.t. } t \in (0, T).$$

Această incluziune apare în mod natural ca limită staționară a soluțiilor problemei $(P_{\varepsilon\mu})$.

Operatorul A este maximal monoton, iar B este un operator Lipschitz.

Prezentăm pe scurt câteva lucrări relevante din literatură privind incluziunile de evoluție abstracte de ordinul al doilea. Studiul incluziunilor de forma $u''(t) \in Au(t)$, cu condiții la limită de forma $u(0) = a$, $u(T) = b$, cu $a, b \in D(A)$, a fost inițiat de V. Barbu [6, 7]. H. Brézis [9] a extins analiza pe intervalul $[0, \infty)$, incluzând condiții la limită neliniare de tipul $u'(0) \in \partial j(u(0) - a)$. R.E. Bruck [11] a introdus termeni neomogeni, analizând incluziuni de tipul $u''(t) \in Au(t) + f(t)$ și condiții la limită pentru $a, b \in \overline{D(A)}$. Mai recent, probleme similare de ordinul al doilea cu condiții de tip Dirichlet–Neumann au fost studiate de L. Barbu și G. Moroșanu [3], precum și de G. Moroșanu și A. Petrușel [21, Lemma 4]. Totuși, rezultatele acestora nu acoperă toate situațiile considerate în Capitolul 1.

Convergența soluțiilor problemei $(P_{\varepsilon\mu})$ atunci când $\varepsilon \rightarrow 0_+$ a fost studiată în mai multe contexte. M. Ahsan și G. Moroșanu [1] au analizat cazul $\mu = 1$, cu A operator liniar și tare monoton, caz extins ulterior la operatori maximal monotoni generali de către L. Barbu și G. Moroșanu [3]. G. Moroșanu și A. Petrușel [21] au studiat comportamentul asimptotic în două situații: (i) $\varepsilon \rightarrow 0$, $\mu > 0$ fixat, și (ii) $\varepsilon > 0$ fixat, $\mu \rightarrow 0$. Rezultatele prezentate în Capitolul 1 constituie contribuții originale care generalizează aceste lucrări anterioare.

Partea a II-a introduce probleme cu condiții la limită antiperiodice într-o formă abstractă, particularizată de-a lungul Capitolelor 2–4, prin ipoteze diferite.

Problema $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ este formulată abstract astfel:

$$(P_{\varepsilon\mu})_{ap} \begin{cases} -\varepsilon u''(t) + \mu u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t)/\text{sau } F(t, u(t)) & \text{a.p.t. } t \in (0, T), \\ u(0) + u(T) = 0, \quad u'(0) + u'(T) = 0, \end{cases}$$

unde $f \in L^2(0, T; H)$, $F : [0, T] \times H \rightarrow H$ este o aplicație de tip Carathéodory care verifică o condiție de creștere subliniară, iar $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$ sunt parametri.

Pentru $\mu > 0$, problema redusă corespunzătoare are forma:

$$(P_\mu)_{ap} \begin{cases} \mu u'(t) + A u(t) + B u(t) \ni f(t)/\text{sau } F(t, u(t)) \text{ a.p.t. } t \in (0, T), \\ u(0) + u(T) = 0. \end{cases}$$

De asemenea, incluziunea algebrică asociată este dată de:

$$(E_{00})_{ap} \quad A u(t) + B u(t) \ni f(t)/\text{sau } F(t, u(t)) \text{ a.p.t. } t \in (0, T).$$

Operatorii A și B , care pot fi multivalenți, verifică ipoteze distincte în fiecare capitol.

Problema $(P_\mu)_{ap}$ cu A operator ciclic monoton și $B = 0$ a fost studiată de Okochi [22], iar Haraux [17] a analizat cazul $Bu = \lambda u$, cu $\lambda > 0$. Aizicovici și Pavel [2] au abordat problemele $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_\mu)_{ap}$ în cazul $B = 0$ sau $B = -\partial\psi$, unde $A = \partial\varphi$ domină B . Autorii au demonstrat existența, unicitatea și dependența continuă a soluțiilor antiperiodice în cazul $B = 0$, precum și rezultate de existență în cazul $B = -\partial\psi$. Aceste lucrări au motivat cercetări ulterioare, cu contribuții notabile în spații Hilbert datorate lui Chen [13], Chen și colaboratorilor [12, 14, 15], precum și lui Couchouron și Precup [16]. Rezultatele obținute în această lucrare privind existența soluțiilor pentru aceste probleme completează aceste studii.

Comportamentul soluțiilor problemei $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ dar și aproximarea celor ale problemelor $(P_\mu)_{ap}$ și $(E_{00})_{ap}$ nu au fost tratate anterior în context antiperiodic. Această lucrare completează acest vid și aduce perspective noi.

În final, prezentăm o noțiune esențială, și anume conceptul de soluție tare pentru problemele introduse anterior. Această definiție oferă cadrul funcțional precis în care formulăm și studiem problemele din Partea a II-a.

Definiția 1 ([5], [25], [26]). *O funcție $u \in W^{2,2}(0, T; H)$ se numește soluție (tare) a problemei $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ dacă sunt îndeplinite simultan următoarele condiții:*

- (i) $u(t) \in D(A)$ a.p.t. $t \in (0, T)$;
- (ii) există $\xi, \eta \in L^2(0, T; H)$ astfel încât

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(t) + \mu u'(t) + \xi(t) - \eta(t) &= f(t)(\text{sau } F(t, u(t))) \text{ și} \\ \xi(t) &\in A u(t), \eta(t) \in B u(t) \text{ a.p.t. } t \in (0, T); \end{aligned} \tag{0.1}$$

- (iii) $u(0) + u(T) = 0, u'(0) + u'(T) = 0$.

În mod similar, o funcție $u \in W^{1,2}(0, T; H)$ se numește soluție a problemei $(P_\mu)_{ap}$ dacă u îndeplinește condițiile (i), (ii) (cu $\varepsilon = 0$), și $u(0) + u(T) = 0$.

Observăm că, dacă operatorii A și/sau B sunt univoci, atunci pentru orice $t \in [0, T]$ avem $\xi(t) = A u(t)$ și/sau $\eta(t) = B u(t)$. În acest caz, definiția de mai sus se simplifică, iar $\xi(t)$ și/sau $\eta(t)$ se înlocuiesc cu expresiile $A u(t)$ și/sau $B u(t)$, respectiv.

Cuvinte cheie: incluziune de evoluție, regularizare în sens Lions, soluție antiperiodică, operator maximal monoton, subdiferențială, operator Lipschitz, ecuații parabolice semiliniare, sisteme diferențiale neliniare de ordinul întâi, ecuația căldurii, sistemul telegraștilor.

Partea I

Incluziuni de evoluție în spații Hilbert cu parametri

Capitolul 1

Incluziuni de evoluție cu doi parametri

Acest capitol oferă o prezentare detaliată a rezultatelor publicate într-o lucrare realizată în colaborare cu L. Barbu și G. Moroșanu, publicată în *Nonlinear Anal. Real World Appl.* [4].

Dintre contribuțiile originale din acest capitol, menționăm în rezumat Teoremele 1.1–1.7. Celelalte rezultate obținute sunt prezentate în teza completă.

Fie H un spațiu Hilbert real, cu produsul scalar notat $(\cdot, \cdot)$ și norma asociată acestuia $\|\cdot\|$. Considerăm următoarea problemă cu condiții la limită în spațiul Hilbert H

$$(P_{\varepsilon\mu}) \begin{cases} -\varepsilon u''(t) + \mu u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \quad u'(T) = 0, \end{cases} \begin{matrix} (E_{\varepsilon\mu}) \\ (BC) \end{matrix}$$

unde $T > 0$ este un moment de timp dat, $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$ sunt doi parametri, iar A , B sunt operatori care satisfac următoarele ipoteze:

(H_A) $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ este un operator maximal monoton (eventual multivoc, caz în care $(E_{\varepsilon\mu})$ este o incluziune de evoluție);

(H_B) $B : D(B) = H \rightarrow H$ este un operator Lipschitz, adică există o constantă $L > 0$ astfel încât $\|Bx - By\| \leq L \|x - y\|$, pentru orice $x, y \in H$.

Ipoteze suplimentare vor fi introduse pe parcursul capitolului.

Pentru $\mu > 0$ considerăm și următoarea problemă Cauchy:

$$(P_\mu) \begin{cases} \mu u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \begin{matrix} (E_\mu) \\ (IC) \end{matrix}$$

Problema (P_μ) este o problemă redusă, obținută din $(P_{\varepsilon\mu})$ pentru $\varepsilon = 0$, care este considerată o problemă perturbată asociată lui (P_μ) . Observăm că în problema (P_μ) este păstrată doar

condiția $u(0) = u_0$ din problema $(P_{\varepsilon\mu})$.

Considerăm, de asemenea, următoarea incluziune (algebrică):

$$(E_{00}) \quad Au(t) + Bu(t) \ni f(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

care se obține luând $\varepsilon = 0$ și $\mu = 0$ în ecuația $(E_{\varepsilon\mu})$.

Pentru început, introducem definiția soluțiilor (tari) corespunzătoare problemelor (P_μ) și $(P_{\varepsilon\mu})$.

Definiția 2 ([19, Definiția 2.1, p. 47]). *Presupunem că ipotezele (H_A) și (H_B) sunt satisfăcute și $u_0 \in D(A)$.*

Fie $\mu > 0$. O funcție $u \in W^{1,2}(0, T; H)$ se numește soluție (tare) a problemei (P_μ) dacă sunt îndeplinite simultan următoarele condiții:

- (i) $u(t) \in D(A)$ a.p.t. $t \in (0, T)$;
- (ii) există $\xi \in L^2(0, T; H)$ astfel încât

$$\mu u'(t) + \xi(t) + Bu(t) = f(t) \quad \text{și} \quad \xi(t) \in Au(t) \quad \text{a.p.t.} \quad t \in (0, T); \quad (1.1)$$

- (iii) $u(0) = u_0$.

Fie $\varepsilon > 0$ și $\mu \geq 0$. În mod similar, o funcție $u \in W^{2,2}(0, T; H)$ se numește soluție (tare) a problemei $(P_{\varepsilon\mu})$ dacă u îndeplinește condiția (i),

- (ii)' există $\xi \in L^2(0, T; H)$ astfel încât

$$-\varepsilon u''(t) + u'(t) + \xi(t) + Bu(t) = f(t) \quad \text{și} \quad \xi(t) \in Au(t) \quad \text{a.p.t.} \quad t \in (0, T); \quad (1.2)$$

- (iii)' $u(0) = u_0, \quad u'(T) = 0$.

În prima secțiune, ne propunem să demonstrăm rezultate de existență și unicitate pentru soluțiile problemei $(P_{\varepsilon\mu})$, precum și pentru incluziunea algebrică (E_{00}) . Începem prin studierea problemei $(P_{\varepsilon\mu})$.

Teorema 1.1 ([4]). *Fie $\varepsilon > 0$ și $\mu \geq 0$. Presupunem că ipotezele (H_A) și (H_B) sunt îndeplinite, iar constanta Lipschitz L asociată lui B satisface*

$$L < \frac{2\varepsilon}{T^2}. \quad (1.3)$$

Atunci, pentru orice $u_0 \in D(A)$ și orice $f \in L^2(0, T; H)$, există o soluție unică $u = u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$ a problemei $(P_{\varepsilon\mu})$.

Demonstrația se bazează pe utilizarea regularizării Yosida pentru a aproxima operatorul neliniar A în cazul $B = 0$. Existența și unicitatea soluției se obține prin argumente de compacitate, incluzând Criteriul Arzelà–Ascoli și proprietatea de demi-închidere a operatorilor maximal monotoni. Existența și unicitatea soluției în cazul $B \neq 0$ rezultă dintr-un argument de punct fix, folosind Principiul Contractiilor al lui Banach, în condiția impusă constantei Lipschitz L .

Condiția $L < \frac{2\varepsilon}{T^2}$ joacă un rol esențial în rezultat, însă nu este necesară în toate cazurile, așa cum ilustrează următorul exemplu.

Un contraexemplu simplu ([4])

Considerăm în $H = \mathbb{R}$ următoarea problemă

$$(P) \quad \begin{cases} -u''(t) + \mu u'(t) - u(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0 \neq 0, & u'(T) = 0. \end{cases}$$

Pentru $\mu = 0$, soluția generală a ecuației de mai sus care satisface $u(0) = u_0$ este dată de $u(t) = u_0 \cos t + c \sin t$, $0 \leq t \leq T$. Dacă $T = \pi/2$, obținem $u'(\pi/2) = -u_0 \neq 0$, deci problema de mai sus nu are soluție. Observăm că nu este satisfăcută condiția (1.3) ($L = 1 > 8/\pi^2 = 2\varepsilon/T^2$).

Totuși, este posibil ca problema $(P_{\varepsilon\mu})$ să aibă soluție chiar dacă nu este satisfăcută condiția (1.3). De exemplu, dacă în problema (P) de mai sus, luăm $\mu = 0$ și $T = 2\pi$, atunci $u = u_0 \cos t$ este soluția unică a acesteia, deși condiția (1.3) nu este satisfăcută.

În continuare, considerăm ecuația (incluziunea) (E_{00}) . Introducem următoarea ipoteză suplimentară pentru operatorul A .

$(H_A)' \quad A : D(A) \subset H \rightarrow H$ (eventual multivoc) este maximal monoton și, în plus, tare monoton de constantă $\omega > 0$; adică

$$(x - y, u - v) \geq \omega \|u - v\|^2 \text{ pentru orice } u, v \in D(A) \text{ și } x \in Au, y \in Av. \quad (1.4)$$

Avem următorul rezultat de existență și unicitate pentru soluția incluziunii (E_{00}) .

Teorema 1.2 ([4]). *Presupunem că ipotezele $(H_A)'$ și (H_B) sunt îndeplinite, cu constantele $\omega > 0$ și $L > 0$ astfel încât $L < \omega$. Atunci, pentru orice $f \in W^{1,p}(0, T; H)$ și orice $p \in (1, \infty)$, ecuația (E_{00}) are o soluție unică $u \in W^{1,p}(0, T; H)$.*

După ce am stabilit că problema $(P_{\varepsilon\mu})$ are soluție și aceasta este unică, analizăm în continuare dependența soluției în raport cu parametrii $\varepsilon > 0$ și $\mu \geq 0$. Mai precis, arătăm că soluția $u_{\varepsilon\mu}$ depinde continuu de ε și μ , dacă aceștia tind către $\varepsilon_0 > 0$ și $\mu_0 \geq 0$. Acest rezultat se obține prin deducerea unor estimări adecvate în spațiul Hilbert $L^2(0, T; H)$ și prin utilizarea atentă a unor argumente de interpolare.

După ce am stabilit continuitatea soluției $u_{\varepsilon\mu}$ în raport cu parametrii ε și μ , analizăm în continuare comportamentul asimptotic al acestei soluții când $\varepsilon \rightarrow 0_+$ și $\mu \rightarrow \mu_0 > 0$. Această analiză are ca scop justificarea riguroasă a convergenței soluției problemei perturbate, de ordinul al doilea $(P_{\varepsilon\mu})$, la soluția problemei reduse, de ordinul întâi (P_μ) .

Teorema 1.3 ([4]). *Presupunem că ipotezele (H_A) și (H_B) sunt îndeplinite, $\mu_0 > 0$ este fixat, $u_0 \in D(A)$, și $f \in W^{1,1}(0, T; H)$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ suficient de mic și $\mu > 0$ suficient de aproape de μ_0 , problemele $(P_{\varepsilon\mu})$ și (P_μ) admit soluții unice $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u_\mu \in W^{1,\infty}(0, T; H)$. În plus, are loc următoarea estimare:*

$$\|u_{\varepsilon\mu} - u_{\mu_0}\|_{C([0,T];H)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4}) + \mathcal{O}(|\mu - \mu_0|^{1/2}). \quad (1.5)$$

Acest rezultat de convergență se obține prin împărțirea demonstrației în doi pași. În primul pas se demonstrează că soluția problemei (P_μ) converge către soluția problemei (P_{μ_0}) când $\mu \rightarrow \mu_0$, folosind o normă de tip Bielecki. În al doilea pas se estimează diferența dintre $u_{\varepsilon\mu}$ și u_μ prin utilizarea unei ponderi exponențiale, urmată de estimări deduse din proprietatea de monotonie ale lui A și proprietatea de a fi Lipschitz a lui B . Cele două estimări sunt apoi combinate pentru a obține rezultatul final.

Observația 1.1 ([4]). *Dacă $\varepsilon > 0$ este un parametru mic și μ este un număr pozitiv fixat (de exemplu $\mu = 1$), atunci problema (perturbată) $(P_{\varepsilon\mu}) \equiv (E_{\varepsilon\mu}) + (BC)$ reprezintă o regularizare de tip Lions a problemei (reduse) $(P_\mu) \equiv (E_\mu) + (IC)$. Pentru cazul în care A este liniar și $B = 0$, vezi [18].*

Dacă A este un operator ciclic monoton, are loc o convergență similară, așa cum este precizat în rezultatul de mai jos.

Teorema 1.4 ([4]). *Presupunem că A este subdiferențiala unei funcții $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ proprii, convexe și inferior semicontinue, iar ipoteza (H_B) este îndeplinită. Fie $\mu_0 > 0$ fixat, $u_0 \in D(A)$ și $f \in L^2(0, T; H)$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ suficient de mic și $\mu > 0$ suficient de aproape de μ_0 , problemele $(P_{\varepsilon\mu})$ și (P_μ) admit soluții unice $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u_\mu \in W^{1,2}(0, T; H)$, iar estimarea (1.5) are loc.*

Această variantă a rezultatului de convergență obținut anterior se bazează pe tehnici similare. Estimarea normei derivatei lui u_μ se obține folosind un rezultat bine cunoscut (vezi [10, Theorem 3.6, p. 72]), în combinație cu argumentul general de continuitate din primul pas al demonstrației Teoremei 1.3.

Secțiunea următoare este dedicată studiului comportamentului asimptotic al soluției $u_{\varepsilon\mu}$ a problemei $(P_{\varepsilon\mu})$ atunci când parametrii tind la zero, adică atunci când $\varepsilon \rightarrow 0_+$ și $\mu \rightarrow 0_+$. Ne așteptăm la un rezultat de convergență a soluției problemei perturbate la soluția incluziunii algebrice (E_{00}) dar nu în norma $C([0, T]; H)$. Într-adevăr, deoarece $u_{\varepsilon\mu}(0) = u_0$, în timp ce u nu satisface în general $u(0) = u_0$, apare un strat limită în jurul punctului $t = 0$. Pentru a compensa această discrepanță, se introduce o funcție corector.

Considerăm mai întâi un model simplificat în care operatorul este A de forma $A = \omega I$ cu $\omega > 0$, iar $B = 0$. În acest caz, ecuația redusă (E_{00}) devine $\omega u = f$, iar funcția corector poate fi construită explicit. Mai precis, considerăm problema

$$\begin{cases} -\varepsilon u_{\varepsilon\mu}'' + \mu u_{\varepsilon\mu}' + \omega u_{\varepsilon\mu} = f, & t \in (0, T), \\ u_{\varepsilon\mu}(0) = u_0, & u_{\varepsilon\mu}'(T) = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

În acest caz am demonstrat următorul rezultat de convergență.

Teorema 1.5 ([4]). *Fie $\varepsilon > 0$ și $\mu > 0$. Atunci, pentru orice $u_0 \in H$ și orice $f \in W^{1,2}(0, T; H)$, problema (1.6) și ecuația (E_{00}) admit soluții unice $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u = (1/\omega)f \in$*

$W^{1,2}(0, T; H)$. Mai mult, pentru $\varepsilon, \mu \ll 1$ și orice $j \geq 1$, are loc următoarea estimare:

$$\|u_{\varepsilon\mu} - (u + \alpha)\|_{C([0, T]; H)} = \mathcal{O}\left(\mu^{1/2} + \varepsilon^{1/4} + \frac{\mu}{\varepsilon^{1/4}} + \frac{\varepsilon^j}{\mu^{1/2}}\right). \quad (1.7)$$

Demonstrația se bazează pe construirea unei funcții corector $\alpha(t)$ care compensează discrepanța dintre $u_{\varepsilon\mu}$ și u în vecinătatea lui $t = 0$ și care verifică o ecuație diferențială ordinară în H .

Considerăm în continuare un cadru mai general, în care operatorul A este liniar, maximal monoton și tare monoton de constantă $\omega > 0$, iar B este Lipschitz. În aceste condiții, convergența se menține, însă în norma mai slabă a spațiului $L^2(0, T; H)$:

Teorema 1.6 ([4]). *Fie $0 < \varepsilon, \mu \ll 1$, astfel încât $\varepsilon < \mu^2/(4L)$. Presupunem că ipotezele $(H_A)'$ și (H_B) sunt îndeplinite și, în plus, că $L < \omega$. Atunci, pentru orice $u_0 \in D(A)$ și orice $f \in W^{1,2}(0, T; H)$, problema $(P_{\varepsilon\mu})$ și ecuația (E_{00}) admit soluții unice $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u \in W^{1,2}(0, T; H)$. Mai mult, dacă A este un operator liniar, atunci are loc următoarea estimare:*

$$\|u_{\varepsilon\mu} - u\|_{L^2(0, T; H)} = \mathcal{O}(\mu^{1/2}). \quad (1.8)$$

Observăm că, dacă ipoteza (H_B) este înlocuită cu $(H_B)'$ $B : H \rightarrow H$ este monoton și Lipschitz pe mulțimi mărginite, obținem următorul rezultat de aproximare.

Teorema 1.7 ([4]). *Fie $0 < \varepsilon, \mu \ll 1$. Presupunem că ipotezele $(H_A)'$ și $(H_B)'$ sunt îndeplinite. Atunci, pentru orice $u_0 \in D(A)$ și orice $f \in W^{1,2}(0, T; H)$, problema $(P_{\varepsilon\mu})$ și ecuația (E_{00}) admit soluții unice $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u \in W^{1,2}(0, T; H)$. Mai mult, dacă A este un operator liniar, are loc următoarea estimare:*

$$\|u_{\varepsilon\mu} - u\|_{L^2(0, T; H)} = \mathcal{O}\left(\mu^{1/2} + \varepsilon^{1/4} + \frac{\varepsilon^j}{\mu^{1/2}}\right) \quad \forall j \geq 1. \quad (1.9)$$

În acest context, demonstrația Teoremei 1.6 poate fi reluată aproape integral, modificarea esențială apărând în estimarea termenului neliniar care implică operatorul B .

Observația 1.2 ([4]). *Cu toate acestea, estimările obținute în Teoremele 1.6 și 1.7 sunt în norma spațiului $L^2(0, T; H)$, nu în norma din $C([0, T]; H)$. Obținerea unor estimări în norma $C([0, T]; H)$ rămâne o problemă deschisă.*

În ultima secțiune a capitolului, aplicăm rezultatele abstracte anterioare ecuației neliniare a căldurii și sistemului telegrafistilor.

Partea a II-a

Probleme la limită cu condiții antiperiodice
și parametri în spații Hilbert

Capitolul 2

Asupra unor incluziuni de evoluție cu parametru și condiții antiperiodice

Rezultatele prezentate în acest capitol fac parte dintr-o lucrare aflată în evaluare la *Monatshefte für Mathematik* [26].

Dintre contribuțiile originale din acest capitol, menționăm în rezumat Teoremele 2.1–2.4. Celelalte rezultate obținute sunt prezentate în teza completă.

Amintim că H reprezintă un spațiu Hilbert real cu produs scalar $(\cdot, \cdot)$ și norma $\|\cdot\|$. Considerăm în H următoarele probleme cu condiții la limită antiperiodice

$$(P_\varepsilon)_{ap} \quad \begin{cases} -\varepsilon u''(t) + u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni F(t, u(t)) \text{ a.p.t. } t \in (0, T), & (E_\varepsilon) \\ u(0) + u(T) = 0, \quad u'(0) + u'(T) = 0, \end{cases}$$

și

$$(P_0)_{ap} \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni F(t, u(t)) \text{ a.p.t. } t \in (0, T), & (E_0) \\ u(0) + u(T) = 0. \end{cases}$$

Pentru a studia problemele $(P_\varepsilon)_{ap}$ și $(P_0)_{ap}$, presupunem că au loc următoarele ipoteze:
(H_F) Aplicația $F : [0, T] \times H \rightarrow H$ este o funcție de tip Carathéodory și satisface următoarea condiție de creștere subliniară

$$\|F(t, v)\| \leq L \|v\| + l(t) \text{ a.p.t. } t \in (0, T) \text{ și pentru orice } v \in H, \quad (2.1)$$

unde $L \geq 0$ și $l \in L^2(0, T)$, cu $l(t) \geq 0$ a.p.t. $t \in (0, T)$.

(H_A) Operatorul $A = \partial\varphi$, unde $\varphi : H \rightarrow [0, +\infty]$ este o funcție pară, proprie, convexă și

inferior semicontinuă, astfel încât $\varphi(0) = 0$. În plus, φ satisface condiția

(H_{φ_c}) pentru orice $r > 0$, mulțimea $\{x \in D(\varphi); \|x\| + \varphi(x) \leq r\}$ este compactă în H .

Operatorul B satisface una dintre următoarele două condiții:

$(H_B)_1$ $B = -\partial\psi$, unde $\psi : H \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție pară, de clasă C^1 , și pentru orice $r > 0$ există o constantă $K_r > 0$ astfel încât $\|\partial\psi(v)\| \leq K_r$ pentru orice $v \in H$ cu $\|v\| \leq r$;

$(H_B)_2$ $B = -\partial\psi$, unde $\psi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ este o funcție pară, proprie, convexă și inferior semicontinuă, care satisface:

(H_ψ) $D(\partial\varphi) \subset D(\partial\psi)$, și pentru orice $r > 0$, există o constantă $\rho_r \in [0, 1)$ și o funcție $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, crescătoare, astfel încât, pentru orice $u \in D(\partial\varphi)$ cu $\|u\| \leq r$, este satisfăcută condiția

$$\|(\partial\psi)^0(u)\|^2 \leq \rho_r \|(\partial\varphi)^0(u)\|^2 + \gamma(\|u\|)(\varphi(u) + 1) \quad (2.2)$$

(unde $(\partial\varphi)^0$ reprezintă secțiunea minimală a lui $\partial\varphi$, și similar pentru ψ).

În prima secțiune obținem rezultate de existență a soluțiilor problemelor $(P_\varepsilon)_{ap}$ și $(P_0)_{ap}$, precum și estimări uniforme în raport cu parametrul ε . Acestea sunt esențiale pentru a analiza comportamentul soluțiilor problemelor $(P_\varepsilon)_{ap}$ atunci când acest parametru converge la 0.

Presupunem în continuare că operatorul B verifică ipoteza $(H_B)_1$ și demonstrăm un prim rezultat de existență corespunzător.

Teorema 2.1 ([26]). *Presupunem că sunt îndeplinite ipotezele (H_A) , $(H_B)_1$ și (H_F) , iar constanta L din (H_F) satisface $L < \pi/T$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, problemele $(P_\varepsilon)_{ap}$ și $(P_0)_{ap}$ admit cel puțin o soluție $u_\varepsilon \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u \in W^{1,2}(0, T; H)$. În plus, aceste soluții satisfac următoarele estimări:*

$$\begin{aligned} \|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)} &\leq \|l\|_{L^2(0,T)} / k_L, \quad \|u_\varepsilon\|_{C([0,T];H)} \leq \mathcal{R}_0, \\ \|\partial\psi(u_\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H)} &\leq C_1, \quad \varepsilon^2 \|u''_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq C_2^2, \quad \|\varphi(u_\varepsilon)\|_{C[0,T]} \leq C_3, \end{aligned} \quad (2.3)$$

cu $u_\varepsilon, \xi_\varepsilon, \varepsilon$ înlocuite cu $u, \xi, 0$, dacă u este o soluție a problemei $(P_0)_{ap}$,

unde $k_L = 1 - LT/\pi$, $\mathcal{R}_0 \stackrel{not.}{=} \sqrt{T} \|l\|_{L^2(0,T)} / (2k_L)$. De asemenea, $C_i, i = \overline{1,3}$ sunt constante pozitive care depind de $T, L, \|l\|_{L^2(0,T)}, \psi(0)$, și constanta din ipoteza $(H_B)_1$ pentru $r = \mathcal{R}_0$, dar sunt independente de ε .

În (2.3), ξ_ε și ξ reprezintă secțiuni ale lui $\partial\varphi(u_\varepsilon)$, respectiv $\partial\varphi(u)$ (vezi Definiția 1).

Existența soluțiilor pentru problemele $(P_\varepsilon)_{ap}$ și $(P_0)_{ap}$ este demonstrată printr-un argument de compacitate bazat pe Teorema de punct fix a lui Schaefer. Estimările uniforme (2.3) sunt obținute folosind inegalități de tip Poincaré pentru funcții antiperiodice cu valori în H , tehnici de monotonie și argumente de regularitate specifice subdiferențialelor $\partial\varphi$ și $\partial\psi$.

Un rezultat similar Teoremei 2.1 are loc în cazul în care B satisface ipoteza $(H_B)_2$ în loc de $(H_B)_1$.

Teorema 2.2 ([26]). *Presupunem că sunt îndeplinite ipotezele (H_A) , $(H_B)_2$ și (H_F) , iar constanta L din (H_F) satisface $L < \pi/T$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, problemele $(P_\varepsilon)_{ap}$ și $(P_0)_{ap}$ admit cel puțin o soluție $u_\varepsilon \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u \in W^{1,2}(0, T; H)$.*

Mai mult, aceste soluții satisfac estimările (2.3)_{1,2} și, în plus:

$$\| \xi_\varepsilon \|_{L^2(0,T;H)} \leq C_1, \| \eta_\varepsilon \|_{L^2(0,T;H)} \leq C_2, \| \varphi(u_\varepsilon) \|_{C[0,T]} \leq C_3, \varepsilon \| u_\varepsilon'' \|_{L^2(0,T;H)} \leq C_4, \quad (2.4)$$

unde u_ε , ξ_ε , η_ε , ε sunt înlocuite cu u , ξ , η , 0 , dacă u este o soluție a lui $(P_0)_{ap}$.

Mai sus, C_i , $i = \overline{1,4}$ sunt constante pozitive care depind de T , L , $\|l\|_{L^2(0,T)}$ și constanta și funcția din ipoteza (H_ψ) , pentru $r = R_0$ (definită anterior în Teorema 2.1), dar sunt independente de ε .

În (2.4), ξ_ε și η_ε reprezintă secțiuni ale lui $\partial\varphi(u_\varepsilon)$, respectiv $\partial\psi(u_\varepsilon)$, iar ξ și η corespund secțiunilor lui $\partial\varphi(u)$, respectiv $\partial\psi(u)$.

Demonstrația acestui rezultat se bazează pe utilizarea regularizării Moreau-Yosida pentru funcția ψ , ceea ce conduce la o familie de probleme aproximative, pentru care existența soluțiilor este garantată de Teorema 2.1. Estimările uniforme în raport cu ε pentru soluțiile problemelor aproximative sunt deduse folosind inegalități de tip Poincaré pentru funcții antiperiodice cu valori în H , proprietăți ale subdiferențialelor și ipoteza (H_ψ) . Folosind metode de compacitate, demănușchidarea operatorilor maximali monoton și slab inferior semicontinuitatea normelor, obținem, prin trecere la limită, existența unei soluții pentru problema originală, împreună cu estimările corespunzătoare. Această tehnică se aplică în mod similar atât problemei perturbate, cât și celei reduse.

Observația 2.1 ([26]). *Un operator care satisface ipoteza $(H_B)_1$ nu verifică, în general, și ipoteza $(H_B)_2$. În acest sens avem următorul exemplu. Considerăm $H = L^2(\Omega)$, unde Ω este un domeniu mărginit și nevid din $\mathbb{R}^N$. Fie $q \in (1, 2]$. Alegem $a \in L^\infty(\Omega)$ astfel încât*

$$m(\{x \in \Omega; a(x) > 0\}) > 0 \quad \text{și} \quad m(\{x \in \Omega; a(x) < 0\}) > 0.$$

Definim funcția pară, de clasă C^1 , $k : H \rightarrow \mathbb{R}$, prin $k(u) = q^{-1} \int_\Omega a(x)|u|^q dx$, și notăm $B = -\partial k : H \rightarrow H$. Atunci, pentru orice $u \in H$, avem $Bu = -a(x)|u|^{q-1} \operatorname{sgn} u$. Din inegalitatea lui Hölder, B satisface $(H_B)_1$. Deoarece k nu este nici convexă, nici concavă, B nu satisface ipoteza $(H_B)_2$.

Observația 2.2 ([26]). *Dacă $F : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ satisface ipoteza (H_F) pe intervalul $[0, T]$ și, în plus,*

$$F(t+T, u) + F(t, -u) = 0 \quad \text{a.p.t. } t \in \mathbb{R} \text{ și orice } u \in H,$$

iar B este un operator impar, atunci soluțiile obținute în rezultatele de mai sus pot fi extinse pe întreaga mulțime $\mathbb{R}$ prin T -antiperiodicitate.

În analiza comportamentului soluțiilor problemei $(P_\varepsilon)_{ap}$ în raport cu parametrul ε , trebuie subliniat că, în ipotezele Teoremelor 2.1 și 2.2, problemele $(P_\varepsilon)_{ap}$ și $(P_0)_{ap}$ nu admit, în general,

soluții unice, așa cum este discutat în lucrările [17] și [24]. Cu toate acestea, putem stabili următorul rezultat privind convergența șirurilor de soluții asociate problemei $(P_\varepsilon)_{ap}$.

Teorema 2.3 ([26]). *Fie $\varepsilon_0 \geq 0$ fixat. Presupunem că ipoteza (H_A) este îndeplinită, împreună cu una dintre ipotezele $(H_B)_1$ sau $(H_B)_2$. În plus, presupunem că (H_F) are loc, iar constanta L satisface $L < \pi/T$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, fie u_ε o soluție a problemei $(P_\varepsilon)_{ap}$, a cărei existență este asigurată de Teorema 2.1, în cazul $(H_B)_1$, sau de Teorema 2.2, în cazul $(H_B)_2$. Atunci, pentru orice șir $0 < \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_0$, există un subșir (notat la fel) astfel încât*

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_n} &\rightarrow u \text{ în } C([0, T]; H), & u'_{\varepsilon_n} &\rightharpoonup u' \text{ slab în } W^{1,2}(0, T; H) \text{ dacă } \varepsilon_0 > 0, \\ u_{\varepsilon_n} &\rightarrow u \text{ în } C([0, T]; H), & u'_{\varepsilon_n} &\rightharpoonup u' \text{ slab în } L^2(0, T; H) \text{ dacă } \varepsilon_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

unde limita u este o soluție a problemei $(P_{\varepsilon_0})_{ap}$ dacă $\varepsilon_0 > 0$, respectiv $(P_0)_{ap}$ dacă $\varepsilon_0 = 0$.

Demonstrația se bazează pe estimările uniforme obținute în Teoremele 2.1 și 2.2, argumente de compacitate și proprietatea de demiînchidere a operatorilor maximal monotoni.

Prezentăm în continuare două condiții suficiente pentru unicitatea soluțiilor problemelor $(P_\varepsilon)_{ap}$ și $(P_0)_{ap}$. Acestea ne permit să demonstrăm că soluția problemei $(P_\varepsilon)_{ap}$ este continuă în raport cu parametrul ε și aproximează soluția problemei $(P_0)_{ap}$ atunci când $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

În cele ce urmează, presupunem că F satisface o ipoteză mai restrictivă decât (H_F) : $(H_F)'$. F este o aplicație de tip Carathéodory care verifică următoarea condiție

$$\|F(t, v) - F(t, w)\| \leq \bar{L} \|v - w\|, \quad (2.6)$$

a.p.t. $t \in (0, T)$ și pentru orice $v, w \in H$, unde $\bar{L}$ este o constantă pozitivă.

Notăm $\mathcal{R}_0 = \sqrt{T} \|F(t, 0)\|_{L^2(0, T)} / (2k_L)$, unde $k_L = 1 - \bar{L}T/\pi$, conform definiției din Teorema 2.1.

Teorema 2.4 ([26]). *Fie $\varepsilon_0 \geq 0$ fixat. Presupunem că sunt verificate (H_A) , $(H_F)'$, împreună cu una dintre ipotezele $(H_B)_1$ sau $(H_B)_2$. În plus, presupunem că este satisfăcută una dintre condițiile:*

(h₁) A este un operator tare monoton cu constanta $\omega > 0$, B este Lipschitz pe bila $\bar{B}_H(0, \mathcal{R}_0)$ cu constanta Lipschitz L_B , și $\bar{L} + L_B < \omega$;

(h₂) A este un operator liniar, B este Lipschitz pe bila $\bar{B}_H(0, \mathcal{R}_0)$ cu constanta Lipschitz L_B , și $(\bar{L} + L_B)T < \pi$.

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, soluțiile u_ε și u ale problemelor $(P_\varepsilon)_{ap}$, respectiv $(P_0)_{ap}$ (obținute în Teorema 2.1, în cazul ipotezei $(H_B)_1$, sau în Teorema 2.2, în cazul ipotezei $(H_B)_2$) sunt unice. În plus, au loc următoarele estimări și rezultate de aproximare:

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}\|_{C([0, T]; H)} &\leq \frac{\sqrt{T}}{2} \|u'_\varepsilon - u'_{\varepsilon_0}\|_{L^2(0, T; H)} = \mathcal{O}(|\varepsilon - \varepsilon_0|), \\ u_\varepsilon &\rightarrow u_{\varepsilon_0} \text{ în } C^1([0, T]; H) \text{ când } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 > 0, \\ \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(0, T; H)} &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \text{ dacă are loc } (h_1) \text{ și } \varepsilon \rightarrow 0_+, \\ u_\varepsilon &\rightarrow u \text{ în } C([0, T]; H) \text{ când } \varepsilon \rightarrow 0_+. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Demonstrația se bazează pe inegalități de tip Poincaré pentru funcții antiperiodice cu valori în H și pe tehnici de monotonie pentru a stabili unicitatea soluțiilor. Separate, se obțin estimările dorite, în funcție de ipoteza considerată, (h_1) sau (h_2) , ținând cont că A este tare monoton, respectiv liniar. Argumente de regularitate și compacitate, sunt folosite pentru a demonstra convergența în $C^1([0, T]; H)$ când $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 > 0$, respectiv în $C([0, T]; H)$ când $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

Secțiunea finală este dedicată aplicării rezultatelor abstracte la probleme concrete. În particular, ne concentrăm asupra ecuației semilineare a căldurii cu condiții la limită antiperiodice în raport cu variabila timp, precum și asupra unor sisteme de ecuații diferențiale ordinare cu soluții antiperiodice.

Capitolul 3

Incluziuni de evoluție cu doi parametri și condiții antiperiodice

Acest capitol prezintă rezultatele din articolul realizat în colaborare cu L. Barbu și G. Moroșanu, acceptat spre publicare în *Communications in Contemporary Mathematics* [5]

Dintre contribuțiile originale din acest capitol, menționăm în rezumat Teoremele 3.1–3.9. Celelalte rezultate pot fi consultate în conținutul integral al tezei.

Fie H un spațiu Hilbert real cu produsul scalar notat $(\cdot, \cdot)$ și norma asociată acestuia $\|\cdot\|$.

Considerăm mai întâi următoarea problemă de ordinul al doilea, cu condiții la limită anti-periodice în H :

$$(P_{\varepsilon\mu})_{ap} \quad \begin{cases} -\varepsilon u''(t) + \mu u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t) & \text{a.p.t. } t \in (0, T), \\ u(0) + u(T) = 0, \quad u'(0) + u'(T) = 0, \end{cases} \quad (E_{\varepsilon\mu})$$

unde $T > 0$ este un moment final fixat, $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$, și $f \in L^2(0, T; H)$.

În cazul $\mu > 0$, analizăm și următoarea problemă antiperiodică de ordinul întâi:

$$(P_{\mu})_{ap} \quad \begin{cases} \mu u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t) & \text{a.p.t. } t \in (0, T), \\ u(0) + u(T) = 0. \end{cases} \quad (E_{\mu})$$

Introducem de asemenea următoarea incluziune algebrică:

$$(E_{00})_{ap} \quad Au(t) + Bu(t) \ni f(t) \quad \text{a.p.t. } t \in (0, T).$$

Analiza din acest capitol se bazează pe următoarele ipoteze generale:

$(H_{\varepsilon\mu})$ parametrii ε și μ satisfac $\varepsilon \geq 0$, $\mu \geq 0$, și $\varepsilon + \mu > 0$;

(H_A) $A = \partial\varphi$, unde $\varphi : H \rightarrow [0, +\infty]$ este o funcție pară, proprie, convexă, inferior semicontinuu, astfel încât $\varphi(0) = 0$;

(H_B) $B : H \rightarrow H$ este un operator continuu cu o creștere subliniară, adică există $L > 0$ și $l \geq 0$, astfel încât

$$\|Bu\| \leq L\|u\| + l \text{ pentru orice } u \in H;$$

(H_{φ_c}) pentru orice $\gamma > 0$, mulțimea $\{x \in D(\varphi); \|x\| \leq \gamma, \varphi(x) \leq \gamma\}$ este compactă în H .

Ipoteze suplimentare asupra operatorilor A și B vor fi introduse pe parcurs.

Prima secțiune este dedicată obținerii existenței soluțiilor problemelor $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_\mu)_{ap}$ și a unor estimări uniforme ale acestora, în raport cu parametrii considerați. Aceste estimări vor fi ulterior utilizate pentru analiza comportamentului soluțiilor problemei $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ în raport cu parametrii ε și μ .

Începem prin stabilirea existenței a cel puțin unei soluții pentru problema $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$, împreună cu estimări uniforme în raport cu parametrul μ .

Teorema 3.1 ([5]). *Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Presupunem că ipotezele (H_A) , (H_{φ_c}) și (H_B) sunt îndeplinite, iar constanta L a operatorului B satisface*

$$L < \frac{\pi^2 \varepsilon}{T^2}. \quad (3.1)$$

Atunci, pentru orice $\mu \geq 0$ și $f \in L^2(0, T; H)$, problema $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ admite cel puțin o soluție $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, astfel încât $\xi_{\varepsilon\mu} \in L^2(0, T; H)$, unde $\xi_{\varepsilon\mu}$ este o secțiune a lui $\partial\varphi(u_{\varepsilon\mu})$ ca în Definiția (1.1). În plus, pentru orice $\mu \geq 0$, au loc următoarele estimări:

$$\|u_{\varepsilon\mu}''\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_{1\varepsilon}, \quad \|u_{\varepsilon\mu}'\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_{2\varepsilon}, \quad \|u_{\varepsilon\mu}\|_{C([0,T];H)} \leq C_{3\varepsilon}, \quad (3.2)$$

$$\|\xi_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_{4\varepsilon}, \quad \|\varphi(u_{\varepsilon\mu})\|_{L^\infty(0,T)} \leq C_{5\varepsilon}, \quad (3.3)$$

unde $C_{i\varepsilon}$, $i = \overline{1, 5}$ sunt constante pozitive care depind de ε , T , $\|f\|_{L^2(0,T;H)}$, L și l , dar sunt independente de μ .

Demonstrația Teoremei 3.1 se bazează pe Teorema de punct fix a lui Schaefer, pentru a obține existența unei soluții. Instrumentele cheie includ argumente de monotonie, inegalități de tip Poincaré și rezultate de scufundare pentru spațiile Sobolev.

Observația 3.1 ([5]). *Concluziile Teoremei 3.1 rămân adevărate dacă renunțăm la ipoteza (H_{φ_c}) , dar în schimb presupunem o condiție mai puternică asupra operatorului B ; mai exact, ipoteza (H_B) este înlocuită cu*

$(H_B)'$ $B : H \rightarrow H$ este un operator Lipschitz cu constanta Lipschitz $\bar{L}$.

Observația 3.2 ([5]). *Considerăm problema $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ cu $A = 0$, $\mu = 0$, și $Bu = \bar{L}u$, unde $\bar{L} < \varepsilon\pi^2/T^2$. Ne aflăm astfel în ipotezele Observației 3.1. Este cunoscut faptul că $\varepsilon\pi^2/T^2$ este*

cea mai mică valoare proprie a problemei

$$\varepsilon u''(t) = \lambda u(t), \quad t \in (0, T), \quad u(0) + u(T) = 0, \quad u'(0) + u'(T) = 0.$$

Prin urmare, potrivit alternativei lui Fredholm (a se vedea, de exemplu, [20, Teorema 7.10]), există $f \in H$, pentru care problema

$$-\varepsilon u''(t) - \varepsilon \frac{\pi^2}{T^2} u(t) = f(t), \quad t \in (0, T), \quad u(0) + u(T) = 0, \quad u'(0) + u'(T) = 0$$

nu are soluție.

Așadar, condiția $\bar{L} < \varepsilon \pi^2 / T^2$ este optimă atunci când $B = \bar{L}u$, ca urmare și în contextul Observației 3.1.

Următorul rezultat oferă o condiție suficientă pentru existența soluțiilor problemelor $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_{\mu})_{ap}$, atunci când constanta L este presupusă „suficient de mică” în raport cu μ . În plus, se obțin estimări uniforme în raport cu ε , care vor fi utilizate în secțiunile următoare.

Teorema 3.2 ([5]). *Fie $\mu > 0$ fixat. Presupunem că ipotezele (H_A) , (H_{φ_c}) și (H_B) sunt îndeplinite, iar constanta L a operatorului B satisface*

$$L < \frac{\pi\mu}{T}. \quad (3.4)$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ și $f \in L^2(0, T; H)$, problemele $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_{\mu})_{ap}$ admit cel puțin o soluție $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u_{\mu} \in W^{1,2}(0, T; H)$, astfel încât $\xi_{\varepsilon\mu}, \xi_{\mu} \in L^2(0, T; H)$, unde $\xi_{\varepsilon\mu}$ și ξ_{μ} reprezintă secțiuni ale lui $\partial\varphi(u_{\varepsilon\mu}(t))$, respectiv $\partial\varphi(u_{\mu}(t))$, ca în Definiția (1.1). În plus, pentru orice $\varepsilon \geq 0$, au loc următoarele estimări:

$$\|u'_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_{1\mu}, \quad \|u_{\varepsilon\mu}\|_{C([0,T];H)} \leq C_{2\mu}, \quad \|\xi_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_{3\mu}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon \|u''_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_{4\mu}, \quad \|\varphi(u_{\varepsilon\mu})\|_{L^\infty(0,T)} \leq C_{5\mu}, \quad (3.6)$$

cu $u_{\varepsilon\mu}$ înlocuit prin u_{μ} dacă $\varepsilon = 0$ (cu excepția estimării (3.6)₁),

unde $C_{i\mu}$, $i = \overline{1, 5}$ sunt constante pozitive care depind de μ , T , $\|f\|_{L^2(0,T;H)}$, L și l , dar sunt independente de ε .

Demonstrația Teoremei 3.2 se bazează pe tehnicile utilizate în Teorema 3.1, folosind un argument de tip punct fix pentru a obține existența, urmat de aplicarea unor inegalități de tip Poincaré pentru funcții antiperiodice cu valori în H , în vederea deducerii estimărilor uniforme.

Observația 3.3 ([5]). *Observăm că rezultatul din Teorema 3.2 rămâne adevărat în absența ipotezei (H_{φ_c}) , dacă se impun condiții mai restrictive asupra operatorilor A și B . Mai exact, presupunem că ipoteza (H_A) este satisfăcută, iar A este, în plus, un operator liniar. De asemenea, considerăm că este îndeplinită ipoteza $(H_B)'$, cu constanta de Lipschitz $\bar{L}$ a operatorului B satisfăcând inegalitatea $\bar{L} < \frac{\pi\mu}{T}$.*

Concluziile Teoremelor 3.1 și 3.2 rămân valabile pentru ipoteze diferite asupra operatorilor A și B . Mai exact, presupunem că ipoteza (H_A) este înlocuită cu ipoteza mai restrictivă $(H_A)'$ ipoteza (H_A) este îndeplinită și, în plus, operatorul A este tare monoton, cu constantă $\omega > 0$ (vezi condiția (1.4)).

În acest caz, se poate demonstra un rezultat similar celor anterioare, în care constanta L satisface o condiție care implică doar constanta ω .

Teorema 3.3 ([5]). *Presupunem că ipotezele $(H_A)'$, (H_{φ_c}) și (H_B) sunt îndeplinite, cu constantele L și ω satisfăcând*

$$L < \omega. \quad (3.7)$$

Atunci, pentru orice ε și μ care satisfac ipoteza $(H_{\varepsilon\mu})$ și orice $f \in L^2(0, T; H)$, problemele $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_{\mu})_{ap}$ admit cel puțin o soluție $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u_{\mu} \in W^{1,2}(0, T; H)$, astfel încât $\xi_{\varepsilon\mu}, \xi_{\mu} \in L^2(0, T; H)$, unde $\xi_{\varepsilon\mu}$ și ξ_{μ} reprezintă secțiuni ale lui $\partial\varphi(u_{\varepsilon\mu}(t))$, respectiv $\partial\varphi(u_{\mu}(t))$, ca în Definiția (1.1). În plus, au loc următoarele estimări:

$$\|u_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C_1, \quad \varepsilon^2 \|u''_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \mu^2 \|u'_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|\xi_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq C_2^2, \quad (3.8)$$

pentru orice ε și μ care satisfac $(H_{\varepsilon\mu})$, cu $u_{\varepsilon\mu}$ înlocuit prin u_{μ} dacă $\varepsilon = 0$;

$$\|u_{\varepsilon\mu}\|_{C([0,T];H)} \leq \frac{C_2\sqrt{T}}{2\mu}, \quad \|\varphi(u_{\varepsilon\mu})\|_{L^\infty(0,T)} \leq C C_2 \left(\frac{C_2}{\mu} + C_1 \right), \quad (3.9)$$

pentru orice $\varepsilon \geq 0$ și $\mu > 0$, cu $u_{\varepsilon\mu}$ înlocuit prin u_{μ} dacă $\varepsilon = 0$;

$$\begin{aligned} \|u'_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)} &\leq \frac{C_2 T}{\pi\varepsilon}, \quad \|u_{\varepsilon\mu}\|_{C([0,T];H)} \leq \frac{C_2 T \sqrt{T}}{2\pi\varepsilon} \\ \text{și } \|\varphi(u_{\varepsilon\mu})\|_{L^\infty(0,T)} &\leq C C_2 \left(\frac{C_2 T}{\pi\varepsilon} + C_1 \right) \quad \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ și } \mu \geq 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

unde $C, C_i, i = 1, 2$ sunt constante pozitive care depind de $T, \|f\|_{L^2(0,T;H)}, \omega, L$ și l , dar sunt independente de ε și μ .

Observația 3.4 ([5]). Merită subliniat faptul că toate concluziile Teoremei 3.3 rămân valabile și dacă presupunem alte ipoteze. Mai precis, renunțăm la ipoteza (H_{φ_c}) și în schimb presupunem că B satisface condiția mai puternică $(H_B)'$, cu constanta Lipschitz $\bar{L} < \omega$. În plus, obținem unicitatea soluțiilor pentru problemele $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ (dacă $\varepsilon > 0$) și $(P_{\mu})_{ap}$.

Demonstrația acestei afirmații se bazează pe Principiul contracțiilor al lui Banach.

Observația 3.5 ([5]). Menționăm că, dacă $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$ și $f(t+T) + f(t) = 0$ a.p.t. $t \in \mathbb{R}$, iar B este un operator impar, atunci soluțiile obținute în rezultatele de mai sus pot fi extinse pe întreaga mulțime $\mathbb{R}$ prin T -antiperiodicitate.

Secțiunea următoare studiază comportamentul soluțiilor problemei $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ în raport cu ε și μ . Începem prin a presupune că ipotezele $(H_A), (H_{\varphi_c})$ și (H_B) sunt îndeplinite. În acest cadru,

problemele $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_{\mu})_{ap}$ nu au neapărat soluții unice (a se vedea [8], [17], [23] și [24]). Vom considera mai multe scenarii, în funcție de care dintre parametrii ε sau μ tinde la zero.

Rezultatele de convergență care urmează (Teoremele 3.4–3.7) sunt obținute utilizând tehnici similare. Demonstrațiile se bazează pe o combinație între estimările uniforme în raport cu parametrii ε și/sau μ obținute anterior, Lema lui Ascoli, proprietatea de demiînchidere a operatorilor maximal monotoni și argumente de convergență slabă în spații Sobolev.

Cazul 1: Fie $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ fixat și $\mu \rightarrow 0_+$.

Considerăm problema $(P_{\varepsilon_0 0})_{ap} \stackrel{not.}{=} (P_{\varepsilon_0})_{ap}$, care corespunde cazului particular $\mu = 0$ în problema $(P_{\varepsilon_0 \mu})_{ap}$. În acest cadru, se obține următorul rezultat de convergență.

Teorema 3.4 ([5]). *Fie $\varepsilon_0 > 0$ fixat. Presupunem că ipotezele Teoremei 3.1 sunt îndeplinite, iar (3.1) este satisfăcută de ε_0 (adică $L < \pi^2 \varepsilon_0 / T^2$). Pentru orice $\mu \geq 0$, fie $u_{\varepsilon_0 \mu}$ o soluție a problemei $(P_{\varepsilon_0 \mu})_{ap}$ dată de Teorema 3.1. Atunci, pentru orice șir $0 < \mu_n \rightarrow 0$, există un subșir (notat la fel), astfel încât $u_{\varepsilon_0 \mu_n} \rightarrow u$ în $C([0, T]; H)$, $u_{\varepsilon_0 \mu_n} \rightarrow u$ slab în $W^{2,2}(0, T; H)$ când $n \rightarrow \infty$, iar limita u este o soluție tare a problemei $(P_{\varepsilon_0})_{ap}$.*

Cazul 2: Fie $\mu = \mu_0 > 0$ fixat și $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

Teorema 3.5 ([5]). *Fie $\mu_0 > 0$ fixat. Presupunem că ipotezele Teoremei 3.2 sunt îndeplinite, iar (3.4) este satisfăcută de μ_0 (adică $L < \pi \mu_0 / T$). Pentru orice $\varepsilon > 0$, fie $u_{\varepsilon \mu_0}$ și u_{μ_0} soluții ale problemelor $(P_{\varepsilon \mu_0})_{ap}$, respectiv $(P_{\mu_0})_{ap}$, date de Teorema 3.2. Atunci, pentru orice șir $0 < \varepsilon_n \rightarrow 0$, există un subșir (notat la fel), astfel încât $u_{\varepsilon_n \mu_0} \rightarrow u_{\mu_0}$ în $C([0, T]; H)$, $u'_{\varepsilon_n \mu_0} \rightarrow u'_{\mu_0}$ slab în $L^2(0, T; H)$ când $n \rightarrow \infty$, iar limita u_{μ_0} este o soluție a problemei $(P_{\mu_0})_{ap}$.*

Cazul 3: Fie $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ și $\mu \rightarrow \mu_0$, cu ε_0, μ_0 satisfăcând ipoteza $(H_{\varepsilon_0 \mu_0})$

În următorul rezultat presupunem că $(H_A)'$, (H_{φ_c}) , și (H_B) sunt îndeplinite, cu constantele ω și L satisfăcând $L < \omega$. În baza acestor ipoteze, putem obține un rezultat de convergență mai general decât cele obținute anterior.

Teorema 3.6 ([5]). *Fie ε_0 și μ_0 fixați, satisfăcând ipoteza $(H_{\varepsilon_0 \mu_0})$. Presupunem că ipotezele Teoremei 3.3 sunt îndeplinite. Pentru orice ε și μ care satisfac $(H_{\varepsilon \mu})_{ap}$, notăm cu $u_{\varepsilon \mu}$ și u_{μ} soluții ale problemelor $(P_{\varepsilon \mu})_{ap}$ și $(P_{\mu})_{ap}$, respectiv, date de Teorema 3.3. Atunci, pentru orice șir cu componente pozitive $(\varepsilon_n, \mu_n) \rightarrow (\varepsilon_0, \mu_0)$, există un subșir (notat la fel), astfel încât*

$$u_{\varepsilon_n \mu_n} \rightarrow u_{\mu_0} \text{ în } C([0, T]; H), \quad u'_{\varepsilon_n \mu_n} \rightarrow u'_{\mu_0} \text{ slab în } L^2(0, T; H) \text{ dacă } \varepsilon_0 = 0,$$

$$u_{\varepsilon_n \mu_n} \rightarrow u \text{ în } C([0, T]; H), \quad u_{\varepsilon_n \mu_n} \rightarrow u \text{ slab în } W^{2,2}(0, T; H) \text{ dacă } \varepsilon_0 > 0,$$

iar limitele u_{μ_0} și u sunt soluții ale problemelor $(P_{\mu_0})_{ap}$, respectiv $(P_{\varepsilon_0 \mu_0})_{ap}$.

Teorema 3.7 ([5]). *Fie $\varepsilon_0 \geq 0$ și $\mu_0 > 0$ fixați. Presupunem că ipotezele din Teorema 3.2 sunt îndeplinite, iar relația (3.4) este satisfăcută pentru μ_0 (adică $L < \pi \mu_0 / T$). Atunci există $\delta_0 \in (0, \mu_0)$, astfel încât pentru orice parametrii ε și μ care satisfac $(H_{\varepsilon \mu})$, cu $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta_0$, $|\mu - \mu_0| < \delta_0$, și $f \in L^2(0, T; H)$, problemele $(P_{\varepsilon \mu})_{ap}$ și $(P_{\mu})_{ap}$ admit soluție $u_{\varepsilon \mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$,*

respectiv $u_\mu \in W^{1,2}(0, T; H)$. Mai mult, pentru orice șir cu componente pozitive $(\varepsilon_n, \mu_n) \rightarrow (\varepsilon_0, \mu_0)$, există un subșir (notat la fel), astfel încât

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_n \mu_n} &\rightarrow u \text{ în } C([0, T]; H), \quad u_{\varepsilon_n \mu_n} \rightarrow u \text{ slab în } W^{2,2}(0, T; H) \text{ dacă } \varepsilon_0 > 0, \text{ și} \\ u_{\varepsilon_n \mu_n} &\rightarrow u_{\mu_0} \text{ în } C([0, T]; H), \quad u'_{\varepsilon_n \mu_n} \rightarrow u'_{\mu_0} \text{ slab în } L^2(0, T; H) \text{ dacă } \varepsilon_0 = 0. \end{aligned}$$

În plus, limitele u și u_{μ_0} sunt soluții tari ale problemelor $(P_{\varepsilon_0 \mu_0})_{ap}$ și $(P_{\mu_0})_{ap}$, respectiv.

Exemple ([5]) Fie Ω un domeniu mărginit și nevid din $\mathbb{R}^N$. Următorii operatori definiți pe $H = L^2(\Omega)$ sunt impari, continui și subliniari, dar nu sunt Lipschitz:

- (1) $Bu = \pm |u|^\alpha \operatorname{sgn} u$, cu $\alpha \in (0, 1)$;
- (2) $Bu = \pm \operatorname{sgn} u \cdot e^{-1/|u|}$ dacă $u \neq 0$, $B0 = 0$.

Pe un spațiu Hilbert arbitrar H , putem considera operatorul $Bu = \pm \|u\|^{\alpha-1} u$, dacă $u \neq 0$, $B0 = 0$, unde $\alpha \in (0, 1)$.

În următoarea secțiune se studiază continuitatea soluțiilor problemei $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ în raport cu ε și μ , incluzând rezultate de aproximare pentru soluțiile problemelor $(P_\mu)_{ap}$ și $(E_{00})_{ap}$. În cele ce urmează, vom considera două situații particulare în care problemele $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_\mu)_{ap}$ admit soluții unice.

În cazul unicității soluțiilor, sunt de așteptat anumite estimări ale ratei de convergență a diferenței $u_{\varepsilon\mu} - u_{\varepsilon_0\mu_0}$ dacă $\varepsilon_0 > 0$, respectiv $u_{\varepsilon\mu} - u_{\mu_0}$ dacă $\varepsilon_0 = 0$ (în norma $C([0, T]; H)$ sau $L^2(0, T; H)$), precum și dependența continuă a soluției $u_{\varepsilon\mu}$ a problemei $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ în raport cu parametrul ε și μ .

Presupunem, pentru început, că operatorul A este tare monoton. Vom presupune de asemenea că sunt îndeplinite ipotezele $(H_A)'$ și $(H_B)'$, cu constantele ω și $\bar{L}$ satisfăcând relația $\bar{L} < \omega$. Este de menționat că ipoteza (H_{φ_c}) nu mai este necesară, în consecință, o vom omite. Observația 3.4 de mai sus garantează existența și unicitatea soluțiilor $u_{\varepsilon\mu}$ și u_μ ale problemelor $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și respectiv $(P_\mu)_{ap}$.

Putem formula următorul rezultat privind dependența continuă a soluției $u_{\varepsilon\mu}$ a problemei $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ în raport cu parametrul ε și μ și aproximarea soluțiilor problemelor reduse. Metodele utilizate pentru a demonstra fiecare dintre cele trei cazuri, în funcție de parametrul care tinde la zero individual sau simultan, sunt similare și implică estimările deduse anterior, proprietățile subdiferențiale și Criteriul lui Arzelà–Ascoli.

Teorema 3.8 ([5]). *Presupunem că ipotezele $(H_A)'$ și $(H_B)'$ sunt îndeplinite, cu constantele ω și $\bar{L}$ satisfăcând $\bar{L} < \omega$. Atunci, pentru orice ε, μ care verifică $(H_{\varepsilon\mu})$ și orice $f \in L^2(0, T; H)$, problemele $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_\mu)_{ap}$ admit soluție unică $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u_\mu \in W^{1,2}(0, T; H)$. Mai mult, pentru orice ε_0, μ_0 fixați care satisfac $(H_{\varepsilon_0\mu_0})$, au loc următoarele*

estimări și aproximări:

$$\begin{aligned}
 & \| u_{\varepsilon\mu} - u_{\varepsilon_0\mu_0} \|_{C([0,T];H)} = \mathcal{O}(|\varepsilon - \varepsilon_0|) + \mathcal{O}(|\mu - \mu_0|) \text{ și} \\
 & u_{\varepsilon\mu} \rightarrow u_{\varepsilon_0\mu_0} \text{ în } C^1([0,T];H) \text{ când } (\varepsilon, \mu) \rightarrow (\varepsilon_0, \mu_0) \text{ dacă } \varepsilon_0 > 0; \\
 & \| u_{\varepsilon\mu} - u_{\mu_0} \|_{L^2(0,T;H)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) + \mathcal{O}(|\mu - \mu_0|) \text{ și} \\
 & u_{\varepsilon\mu} \rightarrow u_{\mu_0} \text{ în } C([0,T];H) \text{ când } (\varepsilon, \mu) \rightarrow (0_+, \mu_0).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dacă, în plus, presupunem că B este un operator impar și $f \in W^{1,2}(0,T;H)$, cu $f(0) + f(T) = 0$, atunci incluziunea (algebrică) $(E_{00})_{ap}$ admite o soluție unică $u_{00} \in W^{1,2}(0,T;H)$, care satisface $u_{00}(0) + u_{00}(T) = 0$, $u(t) \in D(A)$ pentru orice $t \in [0,T]$, și

$$\| u_{\varepsilon\mu} - u_{00} \|_{L^2(0,T;H)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\mu). \tag{3.12}$$

Mai mult, dacă este îndeplinită condiția $\mu^2/\varepsilon = \mathcal{O}(1)$, atunci

$$u_{\varepsilon\mu} \rightarrow u_{00} \text{ în } C([0,T];H) \text{ când } (\varepsilon, \mu) \rightarrow (0_+, 0_+). \tag{3.13}$$

Exemple ([5]) Considerăm următoarele exemple de operatori Lipschitz impari. Mai întâi, considerăm rețracția radială pe bila unitate din H , definită prin $B_1 : H \rightarrow H$,

$$B_1 x = \begin{cases} x & \text{dacă } \|x\| \leq 1, \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{dacă } \|x\| > 1. \end{cases}$$

Este bine cunoscut faptul că B_1 este Lipschitz de constantă $L_1 = 1$.

Un alt exemplu (a se vedea [24, Lemma 2.3]) este operatorul $B_2 : H \rightarrow H$,

$$B_2 x = \begin{cases} x & \text{dacă } \|x\| \leq 1, \\ \frac{x}{\|x\|^2} & \text{dacă } \|x\| > 1, \end{cases}$$

care are, de asemenea, constantă Lipschitz egală cu 1.

Să considerăm acum cazul particular în care $H = L^2(\Omega)$, unde Ω este un domeniu mărginit, nevid din $\mathbb{R}^N$. Câteva exemple de operatori Lipschitz impari pe H sunt: (1) $Bu = \pm \sin u$; (2) $B(u) = \pm u/\sqrt{1+u^2}$; (3) $Bu = \pm \operatorname{sgn} u \cdot \min\{|u|^\alpha, |u|^\beta\}$, cu $0 < \alpha < 1 < \beta$.

În continuare, prezentăm condiții suficiente care garantează unicitatea soluțiilor problemelor $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_\mu)_{ap}$, în cazul în care operatorul A nu mai este tare monoton.

Teorema 3.9 ([5]). Fie ε_0 și μ_0 fixați, satisfăcând $(H_{\varepsilon_0\mu_0})$. Presupunem că (H_A) și $(H_B)'$ sunt îndeplinite, cu constanta Lipschitz $\bar{L}$ a operatorului B astfel încât

$$\bar{L} < \frac{\pi^2 \varepsilon_0}{T^2} \text{ dacă } \varepsilon_0 > 0 \text{ și } \bar{L} < \frac{\pi \mu_0}{T} \text{ dacă } \varepsilon_0 = 0.$$

În plus față de ipotezele de mai sus, dacă $\varepsilon_0 = 0$, presupunem că A este un operator liniar

și ipoteza (H_{φ_c}) este îndeplinită.

Atunci există $\delta_0 \in (0, \max\{\varepsilon_0, \mu_0\})$, astfel încât pentru orice ε și μ satisfăcând $(H_{\varepsilon\mu})$, cu $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta_0$, $|\mu - \mu_0| < \delta_0$, și $f \in L^2(0, T; H)$, problemele $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ și $(P_{\mu})_{ap}$ admit soluție unică $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv $u_{\mu} \in W^{1,2}(0, T; H)$. Mai mult, au loc următoarele estimări și aproximări:

$$\begin{aligned}
 & \|u_{\varepsilon\mu} - u_{\varepsilon_0\mu_0}\|_{C([0,T];H)} = \mathcal{O}(|\varepsilon - \varepsilon_0|) + \mathcal{O}(|\mu - \mu_0|) \quad \text{și} \\
 & u_{\varepsilon\mu} \rightarrow u_{\varepsilon_0\mu_0} \quad \text{în } C^1([0, T]; H) \quad \text{când } (\varepsilon, \mu) \rightarrow (\varepsilon_0, \mu_0) \quad \text{dacă } \varepsilon_0 > 0; \\
 & u_{\varepsilon\mu} \rightarrow u_{\mu_0} \quad \text{în } C([0, T]; H) \quad \text{și} \\
 & u'_{\varepsilon\mu} \rightarrow u'_{\mu_0} \quad \text{slab în } L^2(0, T; H) \quad \text{când } (\varepsilon, \mu) \rightarrow (0_+, \mu_0).
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Secțiunea finală este consacrată aplicării rezultatelor abstracte obținute anterior la probleme concrete, incluzând ecuații semiliniare și neliniare cu condiții antiperiodice în timp.

Capitolul 4

Probleme cu condiții la limită antiperiodice guvernate de operatori maximal monotoni

Rezultatele prezentate în acest capitol fac parte dintr-un articol publicat în *An. Șt. Univ. Ovidius Constanța* [25].

Dintre contribuțiile originale din acest capitol, menționăm în rezumat Teoremele 4.1 și 4.2. Celelalte rezultate obținute sunt prezentate în teza completă.

În acest capitol, studiem incluziuni diferențiale de ordinul întâi și al doilea cu condiții la limită antiperiodice, în ipoteza că operatorul A este maximal monoton, tare monoton, și impar. Acest cadru mai general permite tratarea unor modele neliniare care includ sistemele hiperbolice. Deoarece A nu este o subdiferențială, sunt necesare condiții mai restrictive asupra operatorilor B și funcției f pentru a asigura obținerea unor rezultate similare celor din capitolele anterioare.

Reamintim că H este un spațiu Hilbert real, cu produs scalar $(\cdot, \cdot)$ și normă $\|\cdot\|$ indusă de acesta.

Considerăm în H aceeași clasă de probleme ca în capitolul anterior

$$(P_{\varepsilon\mu})_{ap} \quad \begin{cases} -\varepsilon u''(t) + \mu u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t) & \text{a.p.t. } t \in (0, T), \\ u(0) + u(T) = 0, \quad u'(0) + u'(T) = 0, \end{cases} \quad (E_{\varepsilon\mu})$$

unde $T > 0$, $\varepsilon > 0$, și $\mu \geq 0$, împreună cu

$$(P_{\mu})_{ap} \quad \begin{cases} \mu u'(t) + Au(t) + Bu(t) \ni f(t) & \text{a.p.t. } t \in (0, T), \\ u(0) + u(T) = 0. \end{cases} \quad (E_{\mu})$$

pentru $\mu > 0$. Introducem de asemenea incluziunea algebrică

$$(E_{00})_{ap} \quad Au(t) + Bu(t) \ni f(t) \quad \text{a.p.t. } t \in (0, T),$$

care se obține prin fixarea formală a valorilor $\varepsilon = \mu = 0$ în $(E_{\varepsilon\mu})$.

În acest capitol, considerăm următoarele ipoteze generale asupra operatorilor care apar în problemele formulate anterior

(H_f) $f \in W^{1,2}(0, T; H)$ și $f(0) + f(T) = 0$;

(H_A) Operatorul $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ este impar, maximal monoton și tare monoton de constantă $\omega_0 > 0$ (eventual multivoc);

(H_B) Operatorul $B : H \rightarrow H$ este impar, maximal monoton (eventual multivoc) și satisface următoarea condiție: pentru orice $r > 0$, există $L_r > 0$, astfel încât pentru orice $x \in H$ cu $\|x\| \leq r$, avem $\|Bx\| \leq L_r$.

Observația 4.1. *Un exemplu de operator B care satisface ipoteza (H_B) este $Bx = \|x\|^{p-2}x$. Acest operator este de asemenea ciclic monoton, deoarece corespunde subdiferențialei funcției convexe $x \rightarrow \|x\|^p$.*

Pentru început, demonstrăm că problemele introduse mai sus admit soluții unice. În plus, obținem estimări uniforme ale acestor soluții în raport cu parametrii ε și μ . Aceste estimări vor fi esențiale pentru demonstrarea rezultatelor prezentate în cele ce urmează.

Pe tot parcursul acestui capitol, toate soluțiile problemelor menționate anterior sunt considerate în sensul Definiției 1.

Teorema 4.1 ([25]). *(i) Presupunem că A este un operator maximal monoton impar și că ipoteza (H_B) este îndeplinită. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$, și $f \in L^2(0, T; H)$, problema $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ admite o soluție unică $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$ care satisface următoarea estimare:*

$$\varepsilon \|u''_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)} \leq \|f\|_{L^2(0,T;H)}. \quad (4.1)$$

(ii) Presupunem că ipoteza (H_A) este satisfăcută. Atunci, pentru orice $\varepsilon \geq 0$ și $\mu \geq 0$ cu $\varepsilon + \mu > 0$, și pentru orice f care satisface ipoteza (H_f) , problemele $(P_\mu)_{ap}$ și $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ admit soluții unice $u_\mu \in W^{1,2}(0, T; H)$ și $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$, respectiv. Mai mult, au loc următoarele estimări:

$$\begin{aligned} \|u'_\mu\|_{L^2(0,T;H)} &\leq \omega_0^{-1} \|f'\|_{L^2(0,T;H)} \quad \text{pentru orice } \mu > 0, \\ \|u'_{\varepsilon\mu}\|_{L^2(0,T;H)} &\leq \omega_0^{-1} \|f'\|_{L^2(0,T;H)} \quad \text{pentru orice } \varepsilon > 0, \mu \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

În plus, incluziunea algebrică $(E_{00})_{ap}$ admite o soluție unică $u_{00} \in W^{1,2}(0, T; H)$, care satisface $u_{00}(0) + u_{00}(T) = 0$ și $u(t) \in D(A)$ pentru orice $t \in [0, T]$.

Demonstrația se bazează pe tehnici specifice operatorilor maximal monotoni care includ utilizarea aproximantei Yosida, proprietatea de demiînchidere a extensiilor canonice ale operatorilor A și B precum și pe Criteriul lui Arzelà–Ascoli.

Următoarea secțiune este destinată investigării dependenței continue a soluției $u_{\varepsilon\mu}$ a problemei $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ în raport cu parametrii ε și μ . De asemenea, obținem rezultate de aproximare pentru soluțiile problemei reduse $(P_{\mu})_{ap}$ și a incluziunii algebrice $(E_{00})_{ap}$.

Teorema 4.2 ([25]). *Presupunem că ipoteza (H_B) este satisfăcută.*

(i) *Fie $\varepsilon_0 > 0$ și $\mu_0 \geq 0$ fixați. Presupunem că A este un operator maximal monoton impar. Pentru orice $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$, și $f \in L^2(0, T; H)$, fie $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$ soluția unică a problemei $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$ obținută în Teorema 4.1 (i). Atunci, următoarea estimare și convergență au loc:*

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon\mu} - u_{\varepsilon_0\mu_0}\|_{C([0,T];H)} &= \mathcal{O}(|\varepsilon - \varepsilon_0|) + \mathcal{O}(|\mu - \mu_0|), \\ u_{\varepsilon\mu} &\rightarrow u_{\varepsilon_0\mu_0} \text{ în } C^1([0, T]; H) \text{ când } (\varepsilon, \mu) \rightarrow (\varepsilon_0, \mu_0). \end{aligned} \quad (4.3)$$

(ii) *Fie $\mu_0 > 0$ fixat. Presupunem că (H_A) este îndeplinită. Pentru orice $\varepsilon \geq 0$ și $\mu \geq 0$ cu $\varepsilon + \mu > 0$, și pentru orice f care satisface (H_f) , fie $u_{\varepsilon\mu} \in W^{2,2}(0, T; H)$ și $u_{\mu} \in W^{1,2}(0, T; H)$ soluțiile unice ale problemelor $(P_{\varepsilon\mu})_{ap}$, respectiv $(P_{\mu})_{ap}$, obținute în Teorema 4.1 (ii). Atunci, următoarea estimare și aproximare au loc:*

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon\mu} - u_{\mu_0}\|_{L^2(0,T;H)} &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) + \mathcal{O}(|\mu - \mu_0|), \\ u_{\varepsilon\mu} &\rightarrow u_{\mu_0} \text{ în } C([0, T]; H) \text{ când } (\varepsilon, \mu) \rightarrow (0_+, \mu_0). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mai mult, următoarea estimare este de asemenea valabilă:

$$\|u_{\varepsilon\mu} - u_{00}\|_{L^2(0,T;H)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\mu) \text{ când } (\varepsilon, \mu) \rightarrow (0_+, 0_+), \quad (4.5)$$

unde $u_{00} \in W^{1,2}(0, T; H)$ este soluția unică a incluziunii (algebrice) $(E_{00})_{ap}$, obținută în Teorema 4.1 (ii). În plus, dacă $\mu^2/\varepsilon = \mathcal{O}(1)$, atunci

$$u_{\varepsilon\mu} \rightarrow u_{00} \text{ în } C([0, T]; H) \text{ când } (\varepsilon, \mu) \rightarrow (0_+, 0_+). \quad (4.6)$$

În final, ultima secțiune este dedicată aplicării rezultatelor abstracte obținute anterior la un model semiliniar al sistemului telegrafistilor, cu condiții antiperiodice în timp.

Bibliografie selectivă

- [1] M. Ahsan, G. Moroşanu, Asymptotic expansions for elliptic-like regularizations of semilinear evolution equations, *J. Differential Equations*. **257** (2014), 2926-2949.
- [2] S. Aizicovici, N.H. Pavel, Anti-Periodic Solutions to a Class of Nonlinear Differential Equations in Hilbert Space, *J. Funct. Anal.* **99** (2) (1991), 387-408.
- [3] L. Barbu, G. Moroşanu, Elliptic-like regularization of a fully nonlinear evolution inclusion and applications, *Commun. Contemp. Math.* **19** (5) (2017), 1650037.
- [4] L. Barbu, G. Moroşanu, **I.V. Vîntu**, Second-order differential inclusions with two small parameters, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **77** (2024), 104061.
- [5] L. Barbu, G. Moroşanu, **I.V. Vîntu**, Two-parameter second-order differential inclusions with antiperiodic conditions, accepted for publication in *Commun. Contemp. Math.* atr. no 2550038 <https://doi.org/10.1142/S0219199725500385>.
- [6] V. Barbu, A class of boundary value problems for second-order abstract differential equations, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I **19** (1972), 295-319.
- [7] V. Barbu, Sur un problème aux limites pour une classe d'équations différentielles non-linéaires abstraites du deuxième ordre en t , *C. R. Acad. Sci. Paris* **274** (1972), 459-462.
- [8] A. Beaulieu, Etude de l'unicité des solutions antipériodiques pour des équations d'évolution non linéaires, *Port. Math.* **49** (4) (1992), 455-462.
- [9] H. Brézis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, in *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, E. Zarantonello, Ed., Academic Press, New York, NY, 1971, 101-156.
- [10] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Mathematical Studies, Vol. 5, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [11] R.E. Bruck, Periodic forcing of solutions of a boundary value problem for a second-order differential equation in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.* **76** (1980), 159-173.
- [12] Y.Q. Chen, Y.J. Cho, D. O'Regan, Anti-periodic solutions for evolution equations with mappings in the class (S_+) , *Math. Nachr.* **278** (2005), 356-362.

- [13] Y.Q. Chen, Anti-periodic solutions for semilinear evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.* **315** (2006), 337–348.
- [14] Y.Q. Chen, J.J. Nieto, D. O'Regan, Anti-periodic solutions for fully nonlinear first-order differential equations, *Math. Comput. Modelling.* **46** (2007), 1183–1190.
- [15] Y.Q. Chen, J.J. Nieto, D. O'Regan, Anti-periodic solutions for evolution equations associated with maximal monotone mappings, *Appl. Math. Lett.* **24** (2011), 302–307.
- [16] J. Couchouron, R. Precup, Anti-periodic solutions for second order differential inclusions, *Electron. J. Differential Equations.* **124** (2004), 1–17.
- [17] A. Haraux, Anti-periodic solutions of some nonlinear evolution equations, *Manuscripta Math.* **63** (1989), 479–505.
- [18] J.L. Lions, *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 323, Springer, Berlin, 1973.
- [19] G. Moroşanu, *Nonlinear Evolution Equations and Applications*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.
- [20] G. Moroşanu, *Functional Analysis for the Applied Sciences*, Springer, Cham, 2019.
- [21] G. Moroşanu, A. Petruşel, Two-parameter second-order differential inclusions in Hilbert spaces, *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.* **12** (1-2), (2020).
- [22] H. Okochi, On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations, *J. Math. Soc. Japan.* **40** (1988), 541–553.
- [23] Ph. Souplet, Uniqueness and nonuniqueness results for the anti-periodic solution of some second-order nonlinear evolution equations, *Nonlinear Anal.* **26** (9) (1996), 1511–1525.
- [24] Ph. Souplet, Optimal uniqueness condition for the anti-periodic solutions of some nonlinear parabolic equations, *Nonlinear Anal.* **32** (2) (1998), 279–286.
- [25] **I.V. Vîntu**, On some differential inclusions with anti-periodic solutions, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa* **33** (2) (2025), 157–178.
- [26] **I.V. Vîntu**, Second-order evolution inclusions with anti-periodic solutions and one parameter, submitted to *Monatsh. Math.*