

Universitatea Ovidius din Constanța  
Institutul Studiilor Doctorale  
Școala Doctorală de Matematică  
Domeniul Matematică

Teză de doctorat

Rezumat

Contribuții la studiul unor probleme de valori proprii  
pentru operatori eliptici neliniari

COORDONATOR ȘTIINȚIFIC:

**Prof. Dr. Elena Luminița Cosma**

DOCTORAND:

**Andreea-Laura  
Burlacu (Iordăchianu)**

Constanța  
2025

# Cuprins

|                                                                                                                                              |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducere</b>                                                                                                                           | <b>1</b>  |
| Revizuirea literaturii                                                                                                                       | 2         |
| Motivația și obiectivele tezei                                                                                                               | 6         |
| Structura tezei                                                                                                                              | 7         |
| <b>1 Asupra unei probleme de valori proprii pentru <math>(p, q)</math>-Laplacian cu potențiali de ordin <math>p</math> și <math>q</math></b> | <b>9</b>  |
| 1.1 Formularea problemei și prezentarea rezultatelor principale                                                                              | 9         |
| 1.2 Rezultate auxiliare                                                                                                                      | 11        |
| 1.3 Demonstrația Teoremei 1.1.1                                                                                                              | 12        |
| 1.3.1 Demonstrația Teoremei 1.1.1 (a) (Cazul $r = p$ )                                                                                       | 12        |
| 1.3.2 Demonstrația Teoremei 1.1.1 (b) (Cazul $r = q$ )                                                                                       | 12        |
| 1.4 Demonstrația Teoremei 1.1.2                                                                                                              | 13        |
| 1.4.1 Demonstrația Teoremei 1.1.2 (a) (Cazul $r < p$ )                                                                                       | 13        |
| 1.4.2 Demonstrația Teoremei 1.1.2 (a) (Cazul $r \in (q, q_*)$ )                                                                              | 13        |
| 1.4.3 Demonstrația Teoremei 1.1.2 (b) (Cazul $r \in (p, q)$ )                                                                                | 13        |
| <b>2 Asupra unei probleme de valori proprii pentru <math>(p, q)</math>-Laplacian cu potențiali de tip <math>q</math></b>                     | <b>15</b> |
| 2.1 Formularea problemei și prezentarea rezultatelor principale                                                                              | 15        |
| 2.2 Rezultate auxiliare                                                                                                                      | 17        |
| 2.3 Demonstrația Teoremelor 2.1.1 și 2.1.2                                                                                                   | 17        |
| 2.4 Demonstrația Teoremei 2.1.3                                                                                                              | 19        |
| <b>3 O problemă neliniară de valori proprii de transmisie cu o condiție pe frontieră de tip Neumann-Robin</b>                                | <b>20</b> |
| 3.1 Formularea problemei și prezentarea rezultatelor principale                                                                              | 20        |
| 3.2 Rezultate auxiliare                                                                                                                      | 22        |
| 3.3 Demonstrația Teoremei 3.1.1                                                                                                              | 22        |
| <b>Concluzii generale</b>                                                                                                                    | <b>24</b> |
| Cuvânt de încheiere                                                                                                                          | 24        |
| Direcții viitoare de cercetare                                                                                                               | 24        |
| Diseminarea rezultatelor                                                                                                                     | 24        |
| <b>Bibliografie selectivă</b>                                                                                                                | <b>26</b> |

# Introducere

Operatorul  $p$ -Laplacian, cunoscut și sub denumirea de operatorul  $p$ -armonic și notat cu  $\Delta_p$ , reprezintă unul dintre cei mai studiați operatori în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale. Definit pentru  $p \in (1, \infty)$  prin  $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ , acest operator este neliniar pentru orice  $p \neq 2$ , iar în cazul particular  $p = 2$ , el coincide cu operatorul lui Laplace.

Importanța sa este justificată de numeroase aplicații în fizică și inginerie: modelarea fluxurilor în medii poroase (legea neliniară a lui Darcy), comportamentul materialelor plastice, transferul de căldură în context neliniar, dinamica ghețarilor sau descrierea mișcării browniene. Pentru detalii, a se vedea Benedikt et al. [15], Lindqvist [29], respectiv Barbu, Rehmeier și Röckner [10].

Pentru a introduce problemele clasice de valori proprii asociate operatorului  $p$ -Laplacian, considerăm un domeniu mărginit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , cu  $N \geq 2$ , având frontiera netedă  $\partial\Omega$ . Problema de valori proprii asociată operatorului  $-\Delta_p$ , cu condiții la limită de tip Dirichlet, este:

$$(P_D^0): \quad \begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} u & \text{în } \Omega, \\ u &= 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Un număr real  $\lambda$  este o valoare proprie a acestei probleme dacă există  $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$  astfel încât

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda \cdot \nabla w \, dx = \lambda \int_{\Omega} |u_\lambda|^{p-2} u_\lambda w \, dx, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Se cunoaște faptul că problema  $(P_D^0)$  admite un șir de perechi proprii  $(\lambda_n, u_n)$ , cu  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$ , obținute prin metode variaționale, cea mai cunoscută fiind cea care se bazează pe genul lui Krasnosel'skiĭ și principiul Lusternik–Schnirelmann (a se vedea Gasinski și Papageorgiou [26, Section 6.2]).

Cu excepția cazurilor  $p = 2$  sau  $N = 1$ , nu se cunoaște dacă spectrul este format doar din aceste valori proprii (a se vedea Gasinski și Papageorgiou [26, Section 6.1 și 6.3]). Astfel, spectrul operatorului  $-\Delta_p$ , definit pe spațiul Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , reprezintă o problemă deschisă timp de decenii, cu excepția primei valori proprii  $\lambda_1$  (numită valoare proprie principală). Aceasta este simplă și are o funcție proprie asociată strict pozitivă în  $\Omega$  (vezi Lê [28, Theorem 5.1]). Mai mult,  $\lambda_1$  poate fi caracterizată variațional ca fiind minimul câtului Rayleigh, adică  $\lambda_1 = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p}{\int_{\Omega} |u|^p}$  (a se vedea Motreanu et al. [34, Proposition 9.6]). Rezultate similare există și pentru alte tipuri de condiții la limită, cum ar fi cele de tip Neumann, Robin sau Steklov (vezi Lê [28]).

Operatorul  $-(\Delta_p + \Delta_q)$ , cu  $p, q \in (1, \infty)$ ,  $p \neq q$  cunoscut și sub numele de  $-(p, q)$ -Laplacian reprezintă o perturbare a operatorului  $-\Delta_p$ . Acest operator este, spre deosebire de  $-\Delta_p$ , neomogen. Ca urmare, aplicarea unor tehnici variaționale conduc la determinarea, în anumite cazuri, a întregii mulțimi de valori proprii. La aceste rezultate vom face referire în secțiunile următoare.

Operatorul  $-(p, q)$ -Laplacian reprezintă o combinație a două difuzii neliniare de ordine diferite, reflectând interacțiunea a două mecanisme de transfer cu regimuri distincte. Datorită acestei structuri el are numeroase aplicații în fizica matematică. De exemplu, în cazul în care  $p = 2$  și  $q > 1$ , operatorul  $\Delta + a_q \Delta_q$  cu  $a_q > 0$  apare în teoria Born–Infeld pentru câmpuri electrostatice (vezi Bonheure, Colasuonno și Fortunato [16], precum și Fortunato, Orsina și Pisani [24]). Alte

aplicații ale operatorului  $(p, q)$ -Laplacian pot fi întâlnite în fizica cuantică (vezi Benci et al. [13] și Benci, Fortunato și Pisani [14]), în sistemele de tip reacție-difuzie (vezi Cherfils și Il'yasov [17]), dar și în teoria elasticității neliniare (vezi Marcellini [31] și Zhikov [39]). Problemele de valori proprii cu două faze sunt motivate inclusiv de modele provenite din relativitatea clasică. Un exemplu în acest sens este operatorul

$$Qu := -\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}} \right),$$

care apare ca operator de curbura medie în spațiul Lorentz-Minkowski (vezi Bartnik și Simon [11]). O aproximare de ordinul întâi a acestuia este  $-\Delta u - \Delta_4 u$ , ce corespunde operatorului  $-(2, 4)$ -Laplacian (a se vedea Pompio și Watanabe [38]).

Având în vedere aplicabilitatea extinsă a operatorului  $(p, q)$ -Laplacian, literatura dedicată acestuia, inclusiv studiul valorilor proprii asociate, este deja vastă și continuă să se dezvolte. Menționăm, în acest sens, două lucrări de sinteză relevante, Marano și Mosconi [30], respectiv Barbu și Moroșanu [5].

## Revizuirea literaturii

Pentru a motiva tema abordată în această teză și a evidenția contribuțiile obținute, prezentăm, pe scurt, cele trei probleme care vor fi analizate în capitolele următoare. Le vom nota, doar în acest capitol, pentru simplitate, cu  $(P_i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Considerăm în cele ce urmează un domeniu mărginit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , cu  $N \geq 2$ , având frontieră netedă  $\partial\Omega$ .

Prima problemă investigată este o problemă de valori proprii definită în  $\Omega$  care conține inclusiv potențiali cu ponderi nenegative de ordin  $p$  și  $q$  și condiții la limită de tip parametric:

$$(P_1) : \begin{cases} -(\Delta_p u + \Delta_q u) + \rho_1(x)|u|^{p-2}u + \rho_2(x)|u|^{q-2}u = \lambda\alpha(x)|u|^{r-2}u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{pq}} + \gamma_1(x)|u|^{p-2}u + \gamma_2(x)|u|^{q-2}u = \lambda\beta(x)|u|^{r-2}u, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

unde  $p, q, r \in (1, \infty)$  cu  $p < q$ , iar coeficienții  $\alpha, \rho_i \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\beta, \gamma_i \in L^\infty(\partial\Omega)$  sunt funcții nenegative care satisfac

$$(h_{\alpha\beta}) : \int_{\Omega} \alpha dx + \int_{\partial\Omega} \beta d\sigma > 0, \quad (h_{\rho\gamma}) : \int_{\Omega} \rho_i dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_i d\sigma > 0, \quad i = 1, 2.$$

În condiția la limită considerată am folosit notația

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{pq}} := (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{q-2}) \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad (1)$$

unde  $\nu$  este versorul normalei exterioare la  $\partial\Omega$ . Această notație va fi folosită și în cele ce urmează. A doua problemă are o structură apropiată, însă conține doar potențiali cu ponderi nenegative de ordin  $q$ , ca urmare nu mai există simetrie între exponenții  $p$  și  $q$ :

$$(P_2) : \begin{cases} -(\Delta_p u + \Delta_q u) + \rho(x)|u|^{q-2}u = \lambda\alpha(x)|u|^{r-2}u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{pq}} + \gamma(x)|u|^{q-2}u = \lambda\beta(x)|u|^{r-2}u, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

unde  $1 < q < r < p < \infty$ , iar funcțiile  $\alpha, \rho \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\beta, \gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$  sunt nenegative și verifică ipotezele  $(h_{\alpha\beta})$ ,  $(h_{\rho\gamma})$  introduse anterior în prezentarea problemei  $(P_1)$ .

Ultima problemă studiată este o problemă de transmisie neliniară, de valori proprii, definită astfel:

$$(P_3) : \begin{cases} -\Delta_p u_1 + \gamma_1(x)|u_1|^{r-2}u_1 = \lambda|u_1|^{p-2}u_1, & \text{în } \Omega_1, \\ -\Delta_q u_2 + \gamma_2(x)|u_2|^{s-2}u_2 = \lambda|u_2|^{q-2}u_2, & \text{în } \Omega_2, \\ u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu_p} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu_q}, & \text{pe } \Gamma, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \nu} + \beta(x)|u_2|^{\zeta-2}u_2 = 0, & \text{pe } \Sigma, \end{cases}$$

unde  $\Omega_1$  este un subdomeniu cu frontiera netedă  $\Gamma$ , astfel încât  $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ , iar  $\Omega_2 := \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$ . Se presupune că  $p, q, r, s, \zeta \in (1, \infty)$ ,  $\gamma_i \in L^\infty(\Omega_i)$  pentru  $i = 1, 2$ , iar  $\beta \in L^\infty(\Sigma)$  este nenegativă a.p.t. pe  $\Sigma$ . În condițiile la limită pe  $\Gamma$  și  $\Sigma$ , am notat

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu_\theta} := |\nabla u_i|^{\theta-2} \nabla u_i \cdot \nu_\theta, \quad \theta \in \{p, q\}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu} := |\nabla u_2|^{q-2} \nabla u_2 \cdot \nu,$$

unde  $\nu_p + \nu_q = 0$  sunt versorii normalelor exterioare pe  $\Gamma$ , iar  $\nu$  este versorul normalei exterioare pe  $\Sigma$ .

Ipotezele suplimentare referitoare la exponenți și coeficienți vor fi precizate în capitolele dedicate fiecărei probleme.

Începem cu cazul condițiilor de tip Neumann. Introducem în acest sens problema de valori proprii

$$(P_N) : \begin{cases} -(\Delta_p u + \Delta_q u) = \lambda |u|^{q-2} u & \text{în } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{pq}} = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Un număr real  $\lambda$  este valoare proprie pentru  $(P_N)$  dacă există  $u_\lambda \in W := W^{1, \max\{p, q\}}(\Omega) \setminus \{0\}$  astfel încât

$$\int_{\Omega} \left( |\nabla u_\lambda|^{p-2} + |\nabla u_\lambda|^{q-2} \right) \nabla u_\lambda \cdot \nabla u \, dx = \lambda \int_{\Omega} |u_\lambda|^{q-2} u_\lambda u \, dx \quad \forall u \in W.$$

În acest caz, funcția  $u_\lambda$  se numește funcție proprie corespunzătoare valorii proprii  $\lambda$ , iar perechea  $(\lambda, u_\lambda)$  se numește pereche proprie a problemei  $(P_N)$ .

Pentru  $p > 2$  și  $q = 2$ , Mihăilescu [32, Theorem 1.1] a arătat că spectrul problemei  $(P_N)$  este  $\{0\} \cup (\lambda^N(p, 2), \infty)$ , unde

$$\lambda^N(p, 2) := \left\{ \inf_{u \in W \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\Omega} u^2 \, dx}; \int_{\Omega} u \, dx = 0 \right\} > 0.$$

Pentru  $p < 2$ , Fărcășeanu et al. [19, Theorem 1.1] au identificat întreaga mulțime a valorilor proprii pentru  $(P_N)$  ca fiind mulțimea  $\{0\} \cup (\lambda^N(p, 2), \infty)$ . Mihăilescu și Moroșanu [33] au tratat cazul general  $p \in (1, \infty)$ ,  $q > 2$ , obținând spectrul  $\{0\} \cup (\lambda^N(p, q), \infty)$ , unde

$$\lambda^N(p, q) := \left\{ \inf_{u \in W \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^q \, dx}{\int_{\Omega} |u|^q \, dx}; \int_{\Omega} |u|^{q-2} u \, dx = 0 \right\} > 0. \quad (2)$$

Să considerăm problema de valori proprii asociată operatorului Steklov  $(p, q)$ -Laplacian

$$(P_S) : \begin{cases} -(\Delta_p u + \Delta_q u) = 0 & \text{în } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{pq}} = \lambda |u|^{q-2} u & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Costea și Moroșanu [18, Theorem 3.1] pentru cazul  $p \in (1, \infty)$ ,  $q \in [2, \infty)$  au determinat spectrul problemei  $(P_S)$  ca fiind mulțimea  $\{0\} \cup (\lambda^S(p, q), \infty)$ , unde

$$\lambda^S(p, q) := \left\{ \inf_{u \in W \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^q dx}{\int_{\partial\Omega} |u|^q dx}; \int_{\partial\Omega} |u|^{q-2} u dx = 0 \right\} > 0.$$

În cazul operatorului Robin  $(p, q)$ -Laplacian avem următoarea problemă de valori proprii

$$(P_R) : \begin{cases} -(\Delta_p u + \Delta_q u) = \lambda |u|^{q-2} u & \text{în } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{pq}} + \beta |u|^{q-2} u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

unde  $p, q \in (1, \infty)$ ,  $p \neq q$ , iar  $\beta$  este o constantă pozitivă.

Problema  $(P_R)$  a fost studiată de Gyulov și Moroșanu [27], care au determinat un interval de valori proprii  $(\lambda^R(p, q), \lambda_0)$  și, mai mult, au demonstrat că nu există valori proprii în intervalul  $(-\infty, \lambda^R(p, q)]$ . Constantele de mai sus sunt pozitive și definite prin

$$\lambda^R(p, q) := \inf_{u \in W \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^q dx + \beta \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma}{\int_{\Omega} |u|^q dx} < \lambda_0 := \beta \frac{\int_{\partial\Omega} d\sigma}{\int_{\Omega} dx}. \quad (3)$$

Autorii au enunțat ca problemă deschisă existența valorilor proprii în intervalul  $[\lambda_0, \infty)$ .

Menționăm, de asemenea, lucrarea lui Papageorgiou et al. [36], în care este analizată o problemă de valori proprii mai generală decât  $(P_R)$ , pentru cazul  $1 < p < q$ . În această lucrare, operatorul  $-(\Delta_p + \Delta_q)$  este perturbat printr-un potențial de ordin  $q$  cu o pondere indefinită  $\zeta \in L^s(\Omega)$ , unde  $s < N/q$  dacă  $q \leq N$  și  $s = 1$  dacă  $q > N$ . Constanta  $\beta$  este înlocuită cu o funcție  $\beta \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\beta \not\equiv 0$ , care satisface condiția  $\int_{\Omega} \zeta dx + \int_{\partial\Omega} \beta d\sigma > 0$ . Folosind o abordare similară celei din [27], autorii obțin un rezultat comparabil (vezi [36, Theorem 1]).

Studiul problemelor de valori proprii cu condiții pe frontieră de tipul celor considerate în problemele  $(P_1)$  și  $(P_2)$  a fost inițiat de Von Below și François [12], în cazul particular al operatorului lui Laplace pentru  $\alpha = 1$  și  $\beta > 0$  funcție continuă pe  $\partial\Omega$ . Această problemă este cunoscută în literatură sub denumirea de problemă de valori proprii de tip dinamic, deoarece apare în studiul ecuațiilor parabolice cu condiții la limită de tip dinamic (a se vedea [25]).

Pornind de la acest model liniar, cercetări ulterioare au vizat extinderea acestuia la contexte neliniare, cu operatori de tip  $p$ -Laplacian sau  $(p, q)$ -Laplacian. În acest context, considerăm următoarea problemă de valori proprii generalizată:

$$(P_{\text{gen}}) : \begin{cases} -(\Delta_p u + \Delta_q u) = \lambda \alpha(x) |u|^{r-2} u & \text{în } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{pq}} = \lambda \beta(x) |u|^{r-2} u & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

unde  $p, q, r \in (1, \infty)$  cu  $p \neq q$ , iar  $\alpha, \beta$  sunt funcții nenegative care satisfac ipoteza  $(h_{\alpha\beta})$  formulată în cadrul problemei  $(P_1)$ .

Este bine cunoscut că funcțiile proprii ale problemei  $(P_{\text{gen}})$  aparțin mulțimii

$$\mathcal{C}_r := \left\{ u \in W; \int_{\Omega} \alpha |u|^{r-2} u dx + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^{r-2} u d\sigma = 0 \right\}.$$

În cazul  $r = q$ , Barbu și Moroșanu [7, Theorem 1] au arătat că mulțimea valorilor proprii ale

problemei  $(P_{\text{gen}})$  este egală cu  $\{0\} \cup (\tilde{\lambda}(p, q), \infty)$ , unde

$$0 < \tilde{\lambda}(p, q) := \inf_{u \in \mathcal{C}_q \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^q dx}{\int_{\Omega} \alpha |u|^q dx + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^q d\sigma}.$$

Acest rezultat generalizează atât cazurile anterioare obținute pentru problemele  $(P_N)$  și  $(P_S)$ , cât și rezultatul obținut de Abreu și Madeira [1] pentru problema  $(P_{\text{gen}})$  cu  $q = 2$  și  $p \in (1, \infty)$ ,  $p \neq 2$ .

Dacă  $r \neq q$ , presupunem, fără a restrânge generalitatea, că  $1 < p < q$ . Barbu și Moroșanu [8] au demonstrat că, dacă fie  $1 < r < p < q < \infty$ , fie  $1 < q < p < r < \infty$  și  $r \in \left(1, \frac{q(N-1)}{N-q}\right)$  pentru  $q < N$ , atunci mulțimea valorilor proprii ale problemei  $(P_{\text{gen}})$  este  $[0, \infty)$ . Pe de altă parte, în [6], aceiași autori au arătat că, dacă  $1 < p < r < q < \infty$ , cu  $r < \frac{q(N-1)}{N-q}$  pentru  $q < N$ , atunci există două constante strict pozitive,  $0 < \lambda_* < \lambda^*$ , astfel încât orice  $\lambda \in \{0\} \cup [\lambda^*, \infty)$  este valoare proprie a  $(P_{\text{gen}})$ , în timp ce, aceeași problemă nu are valori proprii în  $\lambda \in (-\infty, \lambda_*) \setminus \{0\}$ .

În ceea ce urmează, vom evidenția **rezultatele originale obținute în cadrul acestei teze** pentru primele două probleme,  $(P_1)$  și  $(P_2)$ , care extind sau generalizează contribuțiile deja existente în literatură.

Mai exact, în lucrările Barbu, Burlacu și Moroșanu [2, 4], unde au fost studiate problemele  $(P_1)$  și, respectiv,  $(P_2)$  introduse anterior, am generalizat și/sau extins rezultatele obținute pentru problemele  $(P_N)$  și  $(P_S)$  din lucrările [18, 19, 27, 32, 33, 36]. Într-adevăr, prin alegerea funcțiilor  $\alpha$  sau  $\beta$  egale cu zero sau, respectiv, unu, se regăsesc condițiile la limită de tip Neumann sau Steklov. Referitor la rezultatele obținute în lucrările [6, 7, 8], acestea au fost extinse în [4] prin studierea spectrului problemei  $(P_2)$ , unde am introdus potențiali de ordin  $q$  în ecuație și/sau pe frontieră. Folosind genusul lui Krasnosel'skiĭ și Principiul lui Lusternik–Schnirelmann, am oferit un răspuns pozitiv la problema deschisă din [27], arătând că problema  $(P_R)$  are valori proprii mai mari decât  $\lambda_0$ .

Pe de altă parte, introducerea potențialilor de ordin  $p$  în problema  $(P_1)$ , alături de cei de ordin  $q$ , a dus la concluzia că, în cazul problemei  $(P_R)$ , prezența unui potențial de ordin  $p$  în ecuație asigură caracterizarea completă a spectrului acesteia. Astfel, dacă alegem  $r = q$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\rho_2 = 0$  în  $\Omega$ ,  $\beta = \gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = \text{const.} > 0$  pe  $\partial\Omega$  iar ponderea  $\rho_1 \geq 0$  a.p.t. în  $\Omega$ , cu  $\int_{\Omega} \rho_1(x) dx > 0$ , atunci, conform Teoremei 2.1.1(b), spectrul problemei este exact intervalul  $(\hat{\lambda}_q, \infty)$ , unde  $\hat{\lambda}_q > 0$  este definit ca în formula (3), cu  $\gamma_2$  în loc de  $\beta$ , conform notațiilor.

Rezultatele obținute arată că nu doar perturbarea operatorului  $-\Delta_q$  prin  $-\Delta_p$ , dar și perturbarea ecuației sau a condițiilor la limită cu termeni de tip potențial de ordin  $p$  poate conduce la obținerea unui spectru continuu pentru problemă, în timp ce în lipsa unor astfel de perturbări nu există rezultate care să caracterizeze complet acest spectru.

În continuare, vom prezenta lucrări recente dedicate problemelor de transmisie neliniare, similare problemei  $(P_3)$ . Problemele de transmisie au diverse aplicații în mecanica fluidelor, fizică, chimie, biologie, de aici și importanța studiului acestora (vezi Fife [20], Nicaise [35]). Reamintim, de exemplu, faptul că Figueiredo și Montenegro [21] au investigat o problemă de transmisie cu creștere exponențială critică, mai precis, neliniaritățile au comportamente de tipul  $\exp(\alpha_0 s^2)$  când  $|s| \rightarrow \infty$ , pentru o constantă  $\alpha_0 > 0$ . Autorii au demonstrat că următoarea problemă eliptică de transmisie în  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f(x, u_1) & \text{în } \Omega_1, \\ -\Delta u_2 = g(x, u_2) & \text{în } \Omega_2, \\ u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} & \text{pe } \Gamma, \\ u_2 = 0 & \text{pe } \Sigma, \end{cases}$$

are o soluție netrivială.

De asemenea, problema de transmisie cu creștere critică

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda f(x, u_1) \text{ în } \Omega_1, \\ -\Delta u_2 = |u_2|^{2^*-2} u_2 \text{ în } \Omega_2, \\ u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} \text{ pe } \Gamma, \\ u_2 = 0 \text{ pe } \Sigma, \end{cases}$$

a fost studiată de aceiași autori în [22]. S-a demonstrat că, pentru  $\lambda$  suficient de mare, problema admite o soluție nenulă. Alte rezultate existente pentru problemele neliniare de transmisie, abordate cu argumente variaționale, pot fi consultate în [23, 33].

O problemă similară problemei  $(P_3)$  a fost investigată de către Barbu et al. în [9]. Autorii au considerat un domeniu mărginit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , cu frontieră de tip Lipschitz  $\partial\Omega$ , care este împărțit în două subdomenii de tip Lipschitz,  $\Omega_1$  și  $\Omega_2$ . Cu alte cuvinte,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$ . Se presupune că frontiera  $\partial\Omega$  este împărțită în două părți,  $\partial\Omega_1$  și  $\partial\Omega_2$ , astfel încât  $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma$  și  $\partial\Omega_2 = \Gamma_2 \cup \Gamma$ . În acest cadru, a fost considerată următoarea problemă de valori proprii:

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 = \lambda |u_1|^{p-2} u_1 & \text{în } \Omega_1, \\ -\Delta_q u_2 = \lambda |u_2|^{q-2} u_2 & \text{în } \Omega_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu_p} = 0 & \text{pe } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu_q} = 0 & \text{pe } \Gamma_2, \\ u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu_p} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu_q} & \text{pe } \Gamma, \end{cases} \quad (0.1)$$

unde, pe frontieră,  $\frac{\partial u}{\partial \nu_r}$ ,  $r = p, q$ , desemnează derivatele conormale ale operatorilor implicați în problemă, similare cu cele din formularea problemei  $(P_3)$ . Folosind principiul Lusternik - Schnirelmann, autorii au demonstrat existența unui șir de valori proprii ale problemei de mai sus care tinde la infinit.

**Problema neliniară de transmisie  $(P_3)$ , investigată de noi** în lucrarea Barbu, Burlacu și Moroșanu [3], generalizează acest rezultat prin includerea unor potențiali nedefiniți în cele două subdomenii, care sunt configurate diferit față de cazul prezentat mai sus. În plus, dacă  $\beta = 0$ , atunci condițiile pe  $\Sigma$  devin de tip Neumann. Mai mult, folosind argumente similare, se pot considera și cazuri cu condiții la limită generalizate, dar și partiționări diferite ale domeniului, inclusiv de tipul celei din lucrarea [9].

## Motivația și obiectivele tezei

Studiul valorilor proprii pentru operatori neliniari de tip  $(p, q)$ -Laplacian a cunoscut în ultimele decenii o dezvoltare semnificativă, atât în plan teoretic, cât și în contextul aplicațiilor.

**Motivația tezei** de față se bazează pe necesitatea extinderii cadrului actual al teoriei, în special în următoarele direcții:

- (i) considerarea simultană a doi operatori neliniari de difuzie de ordine diferite, de tip  $p$ - și  $q$ -Laplacian, cu  $p \neq q$ ;
- (ii) includerea potențialilor cu ponderi nenegative în ecuație și/sau pe frontieră;
- (iii) tratarea unor condiții la limită generalizate, în care parametrul apare atât în ecuație, cât și în condiția de pe frontieră;
- (iv) analiza unei probleme de transmisie între două subdomenii guvernate de operatori diferențiali diferiți.

Pe baza acestor direcții generale, **obiectivele tezei** sunt următoarele:

- 1 Studiul unei probleme de valori proprii cu condiții la limită de tip parametric, în care apar potențiali cu ponderi nenegative de ordin  $p$  și  $q$ , atât în ecuație cât și pe frontieră. Această



- problemă, notată  $(P_1)$ , extinde cazurile clasice Neumann și Steklov;
- 2 Investigarea unei versiuni asimetrice,  $(P_2)$ , în care doar potențialii de ordin  $q$  sunt prezenți, eliminându-se simetria dintre componentele de ordin  $p$  și  $q$ . Se urmărește caracterizarea spectrului în funcție de poziționarea dintre  $p$ ,  $q$  și  $r$ ;
  - 3 Analiza unei probleme de transmisie  $(P_3)$ , în care domeniul este împărțit în două subdomenii disjuncte  $\Omega_1$  și  $\Omega_2$ , cu operatori  $p$ - și  $q$ -Laplacian acționând separat, legați prin condiții de continuitate a soluției și a fluxului pe interfața comună  $\Gamma$ ;
  - 4 Demonstrarea existenței unor șiruri de valori proprii care tind la infinit și, în unele cazuri, caracterizarea completă a spectrului în funcție de parametri implicați;
  - 5 Extinderea unor rezultate recente din literatură prin utilizarea următoarelor metode variaționale: metode directe, metoda de fibrare, metode de tip min-max bazate pe genusul lui Krasnosel'skiĭ și Principiul Lusternik-Schnirelmann aplicat pe varietăți Banach de clasă  $C^1$ .

## Structura tezei

Teza începe cu un capitol de Preliminarii în care sunt prezentate noțiunile și rezultatele clasice utilizate în demonstrarea rezultatelor din capitolele următoare, grupate în două secțiuni: Spații Lebesgue și spații Sobolev, Definiții și proprietăți, Câteva rezultate de calcul variațional.

Capitolul următor (Capitolul 1 în acest rezumat) este dedicat studiului unei probleme de valori proprii pentru operatorul  $(p, q)$ -Laplacian, în prezența unor potențiali cu ponderi nenegative de ordin  $p$  și  $q$ , atât în ecuație, cât și în condițiile la limită. Problema analizată, notată mai sus cu  $(P_1)$ , generalizează cazurile Neumann și Steklov, prin apariția parametrului spectral  $\lambda$  atât în domeniul  $\Omega$ , cât și pe frontiera acestuia. După formularea problemei și enunțarea principalelor ipoteze, se introduc câteva rezultate auxiliare și funcționala de energie  $\mathcal{J}_\lambda$  corespunzătoare problemei studiate. Se investighează proprietățile acesteia (diferențiabilitate, coercivitate, semi-continuitate) care sunt esențiale pentru demonstrațiile ulterioare. Analiza se ramifică în funcție de poziția exponentului  $r$  față de  $p$  și  $q$ . Pentru  $r \in \{p, q\}$ , se obține caracterizarea completă a spectrului, acesta fiind de forma  $(d, \infty)$ , unde  $d > 0$  depinde de  $p$  sau de  $q$ . În cazul  $r = q$ , abordarea folosește varietatea Nehari și Regula Multiplicatorilor lui Lagrange. Pentru cazurile  $r < p$  și  $r \in (q, q_*)$ , spectrul este  $(0, \infty)$ , iar demonstrațiile se bazează pe coercivitatea funcționalei și tehnici variaționale clasice. Cazul cel mai delicat,  $r \in (p, q)$ , cu  $r < p_*$ , este tratat prin metoda de fibrare introdusă de Pohozaev [37], conducând la determinarea unui interval de valori proprii de forma  $[\lambda^*, \infty)$ , cu  $\lambda^* > 0$ , în timp ce pentru  $\lambda < \lambda^* < \lambda^*$  problema nu admite soluții nebanale. Mai sus, am notat, pentru  $\theta \in \{p, q\}$ ,  $\theta_* = (N - 1)\theta/(N - \theta)$  pentru  $\theta < N$  și  $\theta_* = \infty$  pentru  $\theta \geq N$ , exponenții critici de urmă.

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost obținute în cadrul lucrării Barbu, Burlacu și Moroșanu [2].

Următorul capitol cuprinde studiul unei versiuni asimetrice a problemei investigate anterior, notată mai sus cu  $(P_2)$ , în care apar doar potențiali de ordin  $q$ , eliminând astfel simetria în raport cu exponenții  $p$  și  $q$ . Această structură asimetrică conduce la o investigare mai detaliată a comportamentului spectral, în funcție de poziționarea exponenților  $p$ ,  $q$  și  $r$ , necesitând tratarea a zece cazuri distincte. După prezentarea problemei, a ipotezelor și formularea teoremelor principale, este introdusă o problemă auxiliară a cărei primă valoare proprie este esențială în demonstrarea rezultatelor care urmează. În opt dintre cazuri este determinată întreaga mulțime de valori proprii a problemei. Acestea sunt abordate prin metode directe sau prin utilizarea metodei varietății Nehari. Pentru cazul în care  $q < p$  și  $r \in (q, p)$ , se utilizează o metodă min-max bazată pe genusul lui Krasnosel'skiĭ și Principiul Lusternik - Schnirelmann. Se obține astfel existența unui șir de valori proprii convergent la infinit, fără a putea concluziona că acesta descrie întregul

spectru al problemei. Totodată, această tehnică permite extinderea unor rezultate recente din literatură (în special [27]) privind existența unor valori proprii mai mari decât o constantă de prag  $\lambda_0$ .

Rezultatele acestui capitol au fost publicate în articolul Barbu, Burlacu și Moroșanu [4].

Capitolul 3 este consacrat studiului problemei de transmisie  $(P_3)$ , în care operatorii  $p$ -, respectiv  $q$ -Laplacian acționează în subdomenii disjuncte ale unui domeniu  $\Omega$ , legate prin condiții de continuitate a soluției și de echilibru al fluxului. După formularea exactă a problemei și precizarea ipotezelor, este introdus spațiul funcțional  $\widetilde{W}$ , echivalent cu spațiul de funcții cu componente în  $W^{1,p}(\Omega_1)$  și  $W^{1,q}(\Omega_2)$ , cu urme egale pe interfața  $\Gamma$ . Este introdusă o familie de subvarietăți  $\mathcal{M}_\rho$ ,  $\rho > 0$ , de clasă  $C^1$  în  $\widetilde{W}$ , fiecare având genusul infinit, ceea ce le face adecvate pentru aplicarea Principiului Lusternik–Schnirelmann. Se definește apoi o funcțională de energie asociată problemei, notată  $\mathcal{J}$ , și se arată că punctele sale critice condiționate de subvarietățile introduse corespund soluțiilor slabe ale problemei. Se demonstrează că funcționala  $\mathcal{J}$  este coercivă pe aceste subvarietăți și satisface condiția Palais–Smale, fapt ce permite obținerea unui șir de valori proprii ale problemei  $(P_3)$  care tind la infinit. Acest rezultat este prezentat în Teorema 3.1.1. Capitolul este structurat în trei secțiuni, ultimele două: Secțiunea 2.2 este dedicată rezultatelor preliminare (inclusiv demonstrarea proprietăților privind genusul infinit al mulțimilor  $\mathcal{M}_\rho$ ,  $\rho > 0$  și coercivitatea lui  $\mathcal{J}$  pe acestea), iar Secțiunea 2.3 conține demonstrarea rezultatului principal.

Acest capitol se bazează pe lucrarea Barbu, Burlacu și Moroșanu [3].

Teza se încheie cu un scurt capitol care conține posibile direcții de cercetare și diseminarea rezultatelor.

**Cuvinte cheie:** Valori proprii,  $(p, q)$ -Laplacian, varietate Nehari,  $C^1$ -varietate, metode variaționale, problemă neliniară de valori proprii, genusul lui Krasnosel'skiĭ, problemă neliniară de transmisie, principiul Lusternik–Schnirelmann, spații Sobolev.

# Capitolul 1

## Asupra unei probleme de valori proprii pentru $(p, q)$ -Laplacian cu potențiali de ordin $p$ și $q$

În acest capitol sunt prezentate rezultatele originale obținute în colaborare cu L. Barbu și G. Moroșanu, publicate în *An. Șt. Univ. Ovidius Constanța* [2].

Dintre cele mai importante amintim: Teoremele 1.1.1 și 1.1.2, Lemele 1.2.1–1.2.3, 1.3.1–1.3.5 și 1.4.1–1.4.8.

În scopul simplificării notațiilor, vom omite notațiile  $dx$  și  $d\sigma$  în integrale, atunci când contextul este clar și nu apare ambiguitate.

### 1.1 Formularea problemei și prezentarea rezultatelor principale

În această secțiune reamintim problema formulată în Introducere, stabilim notațiile utilizate și enunțăm principalele rezultate ale capitolului.

Fie  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , un domeniu mărginit cu frontiera netedă  $\partial\Omega$ . Considerăm problema de valori proprii asociată operatorului  $\mathcal{A}u = -(\Delta_p u + \Delta_q u)$

$$\begin{cases} \mathcal{A}u + \rho_1(x) |u|^{p-2} u + \rho_2(x) |u|^{q-2} u = \lambda \alpha(x) |u|^{r-2} u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{pq}} + \gamma_1(x) |u|^{p-2} u + \gamma_2(x) |u|^{q-2} u = \lambda \beta(x) |u|^{r-2} u, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

În acest capitol, presupunem că au loc următoarele ipoteze

$(h_{pqr})$   $p, q, r \in (1, \infty)$ ,  $p < q$ ;

$(h_{\alpha\beta})$   $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  și  $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$  sunt funcții nenegative care verifică

$$\int_{\Omega} \alpha \, dx + \int_{\partial\Omega} \beta \, d\sigma > 0; \quad (1.2)$$

$(h_{\rho_i \gamma_i})$   $\rho_i \in L^\infty(\Omega)$  și  $\gamma_i \in L^\infty(\partial\Omega)$ ,  $i = 1, 2$ , sunt funcții nenegative care satisfac

$$\int_{\Omega} \rho_i \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_i \, d\sigma > 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.3)$$

Soluțiile  $u$  ale problemei (1.1) aparțin spațiului  $W := W^{1,q}(\Omega)$  (deoarece  $q > p$ ), și verifică ecuația (1.1)<sub>1</sub> în sensul distribuțiilor, iar condiția pe frontieră (1.1)<sub>2</sub> în sensul urmei.

**Definiția 1.1.1.** Numărul real  $\lambda$  se numește valoare proprie a problemei (1.1) dacă există  $u_\lambda \in W \setminus \{0\}$  astfel încât pentru orice  $u \in W$  are loc egalitatea

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\nabla u_\lambda|^{p-2} + |\nabla u_\lambda|^{q-2}) \nabla u_\lambda \cdot \nabla u + \int_{\Omega} (\rho_1 |u_\lambda|^{p-2} + \rho_2 |u_\lambda|^{q-2}) u_\lambda u \\ & + \int_{\partial\Omega} (\gamma_1 |u_\lambda|^{p-2} + \gamma_2 |u_\lambda|^{q-2}) u_\lambda u = \lambda \left( \alpha \int_{\Omega} |u_\lambda|^{r-2} u_\lambda u + \int_{\partial\Omega} \beta |u_\lambda|^{r-2} u_\lambda u \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Funcția  $u_\lambda$  se numește funcție proprie corespunzătoare valorii proprii  $\lambda$ , asociată problemei (1.1).

Introducem următoarele notații

$$\begin{aligned} K_p(u) &:= \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + \rho_1 |u|^p) + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 |u|^p, \\ K_q(u) &:= \int_{\Omega} (|\nabla u|^q + \rho_2 |u|^q) + \int_{\partial\Omega} \gamma_2 |u|^q, \\ k_\theta(u) &:= \int_{\Omega} \alpha |u|^\theta + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^\theta \quad \forall u \in W, \quad \theta \in \{p, q, r\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\widehat{\lambda}_q := \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{K_q(u)}{k_q(u)}, \quad \widehat{\lambda}_p := \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{K_p(u)}{k_p(u)}, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \lambda_* &:= \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \Gamma \frac{K_p(u)^\omega K_q(u)^{1-\omega}}{k_r(u)}, \quad \lambda^* = \frac{r}{p^\omega q^{1-\omega}} \lambda_*, \\ \omega &:= \frac{q-r}{q-p}, \quad \Gamma := \frac{q-p}{(r-p)^{1-\omega} (q-r)^\omega}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Să observăm faptul că toate funcțiile proprii  $u_\lambda$ , corespunzătoare unei valori proprii  $\lambda > 0$  satisfac condiția  $k_r(u_\lambda) > 0$ , deci toate funcțiile proprii corespunzătoare problemei (1.1) vor aparține mulțimii  $W \setminus \mathcal{Z}$ , unde

$$\mathcal{Z} := \{u \in W; k_r(u) = 0\}.$$

Rezultatele principale ale capitolului sunt următoarele două teoreme.

**Teorema 1.1.1** ([2]). Presupunem că ipotezele  $(h_{pqr})$ ,  $(h_{\alpha\beta})$ ,  $(h_{\rho_i \gamma_i})$  sunt îndeplinite.

- (a) Dacă  $r = p$ , atunci  $\widehat{\lambda}_p > 0$ , iar mulțimea valorilor proprii ale problemei (1.1) este intervalul  $(\widehat{\lambda}_p, \infty)$ ;
- (b) Dacă  $r = q$ , atunci  $\widehat{\lambda}_q > 0$ , iar mulțimea valorilor proprii ale problemei (1.1) este intervalul  $(\widehat{\lambda}_q, \infty)$ .

**Teorema 1.1.2** ([2]). *Presupunem că ipotezele  $(h_{pqr})$ ,  $(h_{\alpha\beta})$  și  $(h_{\rho_i\gamma_i})$  sunt îndeplinite.*

(a) *Dacă  $(r < p)$  sau  $(r > q)$  cu  $r < q(N-1)/(N-q) = q_*$  în cazul  $q < N$ , atunci mulțimea valorilor proprii ale problemei (1.1) este intervalul  $(0, \infty)$ ;*

(b) *Dacă  $p < r < q$  cu  $r < p(N-1)/(N-p) = p_*$  în cazul  $p < N$ , atunci  $0 < \lambda_* < \lambda^*$  și orice  $\lambda \in [\lambda^*, \infty)$  este valoare proprie a problemei (1.1).*

*Mai mult, pentru orice  $\lambda \in (-\infty, \lambda_*)$  problema (1.1) are doar soluția trivială.*

*În plus, cele două constante  $\lambda_*$ ,  $\lambda^*$  pot fi exprimate astfel*

$$\lambda_* = \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{K_p(u) + K_q(u)}{k_r(u)}, \quad \lambda^* = \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{\frac{1}{p}K_p(u) + \frac{1}{q}K_q(u)}{\frac{1}{r}k_r(u)}. \quad (1.8)$$

## 1.2 Rezultate auxiliare

Această secțiune reunește câteva rezultate tehnice care vor fi utilizate în demonstrarea teoremelor prezentate anterior.

**Lema 1.2.1** ([2]). *Presupunem că ipoteza  $(h_{\alpha\beta})$  este îndeplinită. Dacă*

$$\theta, \tilde{r} \in (1, \infty) \text{ și } \left[ \tilde{r} < \theta_* \text{ dacă } \theta < N \right],$$

*atunci,*

$$\|u\|_{\theta, \tilde{r}} := \|\nabla u\|_{L^\theta(\Omega)} + (k_{\tilde{r}}(u))^{\frac{1}{\tilde{r}}} \quad \forall u \in W^{1,\theta}(\Omega)$$

*este o normă pe  $W^{1,\theta}(\Omega)$ , echivalentă cu cea standard.*

În cele ce urmează, pentru  $\theta > 1$ , considerăm următoarea problemă de valori proprii

$$\begin{cases} -\Delta_\theta u + \rho(x) |u|^{\theta-2} u = \lambda \alpha(x) |u|^{\theta-2} u & \text{în } \Omega, \\ |\nabla u|^{\theta-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma(x) |u|^{\theta-2} u = \lambda \beta(x) |u|^{\theta-2} u & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.9)$$

unde  $\rho \in L^\infty(\Omega)$  și  $\gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$  sunt funcții nenegative date, care satisfac

$$\int_{\Omega} \rho + \int_{\partial\Omega} \gamma > 0. \quad (1.10)$$

Definim funcționala de clasă  $C^1$

$$\Theta_\theta : W^{1,\theta}(\Omega) \setminus \mathcal{Z}_\theta \rightarrow (0, \infty), \quad \Theta_\theta(u) := \frac{K_\theta(u)}{k_\theta(u)} \quad \forall u \in W^{1,\theta}(\Omega) \setminus \mathcal{Z}_\theta,$$

unde

$$K_\theta(u) := \int_{\Omega} (|\nabla u|^\theta + \rho |u|^\theta) + \int_{\partial\Omega} \gamma |u|^\theta.$$

**Lema 1.2.2** ([2]). *Presupunem că ipoteza  $(h_{\alpha\beta})$  este verificată, iar  $\rho \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$  sunt funcții nenegative care satisfac (1.10). Atunci, există  $u_* \in W^{1,\theta}(\Omega) \setminus \mathcal{Z}_\theta$  astfel încât*

$$\Theta_\theta(u_*) = \lambda_\theta := \inf_{u \in W^{1,\theta}(\Omega) \setminus \mathcal{Z}_\theta} \Theta_\theta(u) > 0.$$

*Mai mult,  $\lambda_\theta$  este cea mai mică valoare proprie a problemei (1.9), iar  $u_*$  este o funcție proprie corespunzătoare valorii proprii  $\lambda_\theta$ .*

Pentru  $\lambda > 0$  vom defini funcționala de energie asociată problemei (1.1)

$$\mathcal{J}_\lambda : W \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{p}K_p(u) + \frac{1}{q}K_q(u) - \frac{\lambda}{r}k_r(u), \quad \forall u \in W. \quad (1.11)$$

Coercivitatea funcționalei  $\mathcal{J}_\lambda$  pe  $W$  este studiată în lema următoare.

**Lema 1.2.3** ([2]). *Presupunem că ipotezele  $(h_{pqr})$ ,  $(h_{\alpha\beta})$ ,  $(h_{\rho_i\gamma_i})$  sunt îndeplinite. Atunci, pentru orice  $r \in (1, q)$ , funcționala  $\mathcal{J}_\lambda$  este coercivă pe  $W$ , echivalent,  $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\lambda(u) = \infty$ .*

### 1.3 Demonstrația Teoremei 1.1.1

În această secțiune vom presupune că ipotezele  $(h_{pqr})$ ,  $(h_{\alpha\beta})$  și  $(h_{\rho_i\gamma_i})$  sunt îndeplinite și le vom utiliza fără a le mai menționa în rezultatele intermediare.

#### 1.3.1 Demonstrația Teoremei 1.1.1 (a) (Cazul $r = p$ )

Demonstrația Teoremei 1.1.1 (a) se bazează pe următoarele două leme.

**Lema 1.3.1** ([2]). *Dacă  $r = p$ , atunci  $\widehat{\lambda}_p > 0$  și nu există valori proprii ale problemei (1.1) în intervalul  $(-\infty, \widehat{\lambda}_p]$ . Mai mult, are loc inegalitatea*

$$\widetilde{\lambda}_p := \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{\frac{1}{q}K_q(u) + \frac{1}{p}K_p(u)}{\frac{1}{p}k_p(u)} = \widehat{\lambda}_p. \quad (1.12)$$

**Lema 1.3.2** ([2]). *Dacă  $r = p$ , atunci orice  $\lambda > \widehat{\lambda}_p$  este o valoare proprie a problemei (1.1).*

Utilizând Lemele 1.3.1 și 1.3.2, Teorema 1.1.1 (a) este complet demonstrată.

#### 1.3.2 Demonstrația Teoremei 1.1.1 (b) (Cazul $r = q$ )

Observăm că, în cazul  $r = q$ , funcționala  $\mathcal{J}_\lambda$  are următoarea formă

$$\mathcal{J}_\lambda : W \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{p}K_p(u) + \frac{1}{q}K_q(u) - \frac{\lambda}{q}k_q(u) \quad \forall u \in W. \quad (1.13)$$

În acest caz, funcționala  $\mathcal{J}_\lambda$  nu mai este coercivă pe  $W$ , așadar va trebui să utilizăm o altă metodă. În acest scop, pentru  $\lambda > 0$ , definim varietatea Nehari

$$\mathcal{N}_\lambda = \{u \in W \setminus \{0\}; \langle \mathcal{J}'_\lambda(u), u \rangle = 0\} = \{u \in W \setminus \{0\}; K_p(u) + K_q(u) - \lambda k_q(u) = 0\}.$$

**Lema 1.3.3** ([2]). *Dacă  $r = q$ , atunci  $\widehat{\lambda}_q > 0$  și nu există valori proprii ale problemei (1.1) în intervalul  $(-\infty, \widehat{\lambda}_q]$ . În plus, are loc următoarea egalitate*

$$\widetilde{\lambda}_q := \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{\frac{q}{p}K_p(u) + K_q(u)}{k_q(u)} = \widehat{\lambda}_q. \quad (1.14)$$

**Lema 1.3.4** ([2]). *Fie  $\lambda > \widehat{\lambda}_q$ . Dacă  $r = q$ , atunci există un punct  $u_* \in \mathcal{N}_\lambda$  unde  $\mathcal{J}_\lambda$  își atinge valoare minimă peste varietatea  $\mathcal{N}_\lambda$ , iar*

$$m_\lambda := \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda} \mathcal{J}_\lambda(u) > 0.$$

**Lema 1.3.5** ([2]). Fie  $\lambda > \hat{\lambda}_q$ . Dacă  $r = q$ , atunci minimul  $u_* \in \mathcal{N}_\lambda$  din Lema 1.3.4 este o funcție proprie a problemei (1.1) corespunzătoare valorii proprii  $\lambda$ .

Folosind Lemele 1.3.3, 1.3.4 și 1.3.5, Teorema 1.1.1 (b) este complet demonstrată.

## 1.4 Demonstrația Teoremei 1.1.2

Demonstrarea Teoremei 1.1.2 se bazează pe următoarele leme în care presupunem ipotezele  $(h_{pqr})$ ,  $(h_{\rho_i \gamma_i})$  și  $(h_{\alpha\beta})$ , fără a le menționa explicit în enunțuri.

### 1.4.1 Demonstrația Teoremei 1.1.2 (a) (Cazul $r < p$ )

**Lema 1.4.1** ([2]). Dacă  $r < p$ , atunci orice  $\lambda > 0$  este o valoare proprie a problemei (1.1).

### 1.4.2 Demonstrația Teoremei 1.1.2 (a) (Cazul $r \in (q, q_*)$ )

Fie  $\lambda > 0$  un număr real fixat. Deoarece în cazul  $r \in (q, q_*)$ , funcționala  $\mathcal{J}_\lambda$  nu mai este coercivă pe  $W$ , definim o nouă varietate Nehari, astfel

$$\hat{\mathcal{N}}_\lambda = \{u \in W \setminus \{0\}; \langle \mathcal{J}'_\lambda(u), u \rangle = K_p(u) + K_q(u) - \lambda k_r(u) = 0\}. \quad (1.15)$$

**Lema 1.4.2** ([2]). Presupunem că ipotezele  $q < r$  și  $(r < q(N-1)/(N-q) = q_*$  dacă  $q < N$ ) sunt satisfăcute. Atunci există un punct  $u_* \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda$  în care funcționala  $\mathcal{J}_\lambda$  își atinge valoarea minimă peste varietatea  $\hat{\mathcal{N}}_\lambda$ ,  $m_\lambda := \inf_{u \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda} \mathcal{J}_\lambda(u) > 0$ .

**Lema 1.4.3** ([2]). Presupunem că  $q < r$  și  $(r < q_*$  dacă  $q < N$ ). Atunci, minimul  $u_* \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda$  din Lema 1.4.2 este o funcție proprie a problemei (1.1), corespunzătoare valorii proprii  $\lambda$ .

În concluzie, folosind Lemele 1.4.1-1.4.3, Teorema 1.1.2 (a) este complet demonstrată.

### 1.4.3 Demonstrația Teoremei 1.1.2 (b) (Cazul $r \in (p, q)$ )

Demonstrația acestui rezultat necesită o abordare diferită față de celelalte cazuri, deoarece funcționala  $\mathcal{J}_\lambda$  nu este nici coercivă pe  $W$  și nici mărginită pe varietatea Nehari.

Demonstrația Teoremei 1.1.2 (b) o vom face, ca și în cazurile anterioare, cu ajutorul unor leme care presupun ipotezele  $(h_{pqr})$ ,  $(h_{\rho_i \gamma_i})$  și  $(h_{\alpha\beta})$ , fără a le preciza în mod explicit în cadrul fiecărui enunț.

**Lema 1.4.4** ([2]). Presupunem că  $p < r < q$  și  $r < p_*$  dacă  $p < N$ . Atunci,  $0 < \lambda_* < \lambda^*$ .

**Lema 1.4.5** ([2]). Presupunem că  $p < r < q$  și  $r < p_*$  dacă  $p < N$ . Atunci constantele  $\lambda_*$  și  $\lambda^*$  definite în relația (1.7) pot fi exprimate în mod echivalent astfel

$$\lambda_* = \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{K_p(u) + K_q(u)}{k_r(u)}, \quad \lambda^* = \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{\frac{1}{p}K_p(u) + \frac{1}{q}K_q(u)}{\frac{1}{r}k_r(u)}. \quad (1.16)$$

Definim funcționala

$$\Phi : W \setminus \mathcal{Z} \rightarrow (0, \infty), \quad \Phi(u) := \Gamma \frac{K_p(u)^\omega K_q(u)^{1-\omega}}{k_r(u)} \quad \forall u \in W \setminus \mathcal{Z}.$$

**Lema 1.4.6** ([2]). *Presupunem că  $p < r < q$  și  $r < p_*$  dacă  $p < N$ . Atunci există  $u_* \in W \setminus \mathcal{Z}$  astfel încât  $\lambda_* = \Phi(u_*) = \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \Phi(u)$ .*

**Lema 1.4.7** ([2]). *Presupunem că  $p < r < q$  și  $r < p_*$  dacă  $p < N$ . Dacă  $u_* \in W \setminus \mathcal{Z}$  este minimul determinat în Lema 1.4.6, atunci*

$$u^* = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/(q-p)} t(u_*) u_* \in W \setminus \mathcal{Z}, \quad (1.17)$$

unde  $t(u_*)$  este o funcție proprie a problemei (1.1) corespunzătoare valorii proprii  $\lambda^*$ .  
În plus,

$$\mathcal{J}_{\lambda^*}(u^*) = 0.$$

**Lema 1.4.8** ([2]). *Presupunem că  $p < r < q$  și  $r < p_*$  dacă  $p < N$ . Atunci, orice număr  $\lambda \in (\lambda^*, \infty)$  este o valoare proprie a problemei (1.1) și pentru fiecare  $\lambda \in (-\infty, \lambda^*) \setminus \{0\}$  problema (1.1) are doar soluția trivială.*

În concluzie, utilizând Lemele 1.4.4, 1.4.5, 1.4.7 și 1.4.8, demonstrația Teoremei 1.1.2 (b) este completă.



# Capitolul 2

## Asupra unei probleme de valori proprii pentru $(p, q)$ -Laplacian cu potențiali de tip $q$

Capitolul de față este dedicat prezentării rezultatelor obținute în colaborare cu L. Barbu și G. Moroșanu, apărute în *Mediterr. J. Math.* [4].

Enumerăm pe cele mai importante dintre acestea: Teoremele 2.1.1 – 2.1.3, Lema 2.2.1, Lemele 2.3.1–2.3.6, precum și Lemele 2.4.1–2.4.2.

Pentru simplificarea notațiilor, în continuare vom omite elementele de măsură  $dx$  și  $d\sigma$  din integrale, acolo unde nu există risc de confuzie.

### 2.1 Formularea problemei și prezentarea rezultatelor principale

În această secțiune reamintim problema formulată în Introducere, stabilim notațiile utilizate în continuare și enunțăm rezultatele principale ale capitolului.

Fie  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , cu  $N \geq 2$ , un domeniu mărginit, cu frontiera netedă  $\partial\Omega$ . Considerăm în  $\Omega$  problema de valori proprii asociată operatorului  $-\Delta_p - \Delta_q$

$$\begin{cases} -(\Delta_p u + \Delta_q u) + \rho(x) |u|^{q-2} u = \lambda \alpha(x) |u|^{r-2} u & \text{în } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{pq}} + \gamma(x) |u|^{q-2} u = \lambda \beta(x) |u|^{r-2} u & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Întreaga analiză din acest capitol se sprijină pe ipotezele următoare

$(h_{pqr})$   $p, q, r \in (1, \infty)$ ,  $p \neq q$ ;

$(h_{\alpha\beta})$   $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  și  $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$  sunt funcții nenegative date care satisfac

$$\int_{\Omega} \alpha + \int_{\partial\Omega} \beta > 0; \quad (2.2)$$

( $h_{\rho\gamma}$ )  $\rho \in L^\infty(\Omega)$  și  $\gamma \in L^\infty(\partial\Omega)$  sunt funcții nenegative date astfel încât

$$\int_{\Omega} \rho + \int_{\partial\Omega} \gamma > 0; \quad (2.3)$$

( $h$ ) Dacă  $r = q$ , atunci nu există o constantă pozitivă  $k_0$  astfel încât

$$\rho = k_0 \alpha \text{ a.p.t. în } \Omega \text{ și } \gamma = k_0 \beta \text{ a.p.t. pe } \partial\Omega.$$

Impunând ipotezele de mai sus și analizând poziționarea lui  $r$  în raport cu  $p$  și  $q$ , putem descrie complet spectrul problemei enunțate anterior în opt dintre cele zece cazuri posibile. În celelalte două cazuri, obținem doar submulțimi ale spectrului (a se vedea Teoremele 2.1.1–2.1.3 prezentate mai jos).

Deoarece am presupus doar  $p \neq q$ , soluția  $u$  a problemei (2.1) este un element al spațiului Sobolev  $W := W^{1,\max\{p,q\}}(\Omega)$ , care satisface ecuația (2.1)<sub>1</sub> în sensul distribuțiilor și condiția de pe frontieră (2.1)<sub>2</sub> în sensul urmei. În acest sens, avem următoarea definiție.

**Definiția 2.1.1.** (i) O funcție  $u \in W$  se numește soluție slabă a problemei (2.1) dacă

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{q-2}) \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \rho |u|^{q-2} uv + \int_{\partial\Omega} \gamma |u|^{q-2} uv \\ = \lambda \left( \int_{\Omega} \alpha |u|^{r-2} uv + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^{r-2} u_{\lambda} v \right) \quad \forall v \in W. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(ii) Numărul real  $\lambda$  se numește valoare proprie a problemei (2.1) dacă aceasta admite o soluție slabă nenulă  $u_{\lambda} \in W \setminus \{0\}$ . În acest caz, funcția  $u_{\lambda}$  se numește funcție proprie corespunzătoare valorii proprii  $\lambda$ , iar perechea  $(\lambda, u_{\lambda})$  se numește pereche proprie a problemei (2.1).

Toate funcțiile proprii ale problemei (2.1) satisfac relația  $j_r(u_{\lambda}) > 0$ , unde

$$j_r(u) := \int_{\Omega} \alpha |u|^r + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^r \quad \forall u \in W, \quad (2.5)$$

așadar, acestea aparțin mulțimii

$$W \setminus \mathcal{Z}, \quad \mathcal{Z} := \{u \in W; j_r(u) = 0\}. \quad (2.6)$$

Introducem, de asemenea, următoarele constante care vor juca un rol important în rezultatele obținute în continuare:

$$\Lambda_q := \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^q + \rho |u|^q) + \int_{\partial\Omega} \gamma |u|^q}{j_r(u)}, \quad \lambda_0 := \frac{\int_{\Omega} \rho + \int_{\partial\Omega} \gamma}{j_r(1)}. \quad (2.7)$$

În plus, pentru orice  $\sigma > 0$ , definim mulțimea

$$\mathcal{M}_{\sigma} := \{u \in W; j_r(u) = \sigma\}. \quad (2.8)$$

Rezultatele principale ale capitolului sunt următoarele trei teoreme.

**Teorema 2.1.1** ([4]). Presupunem că ipotezele ( $h_{pq}$ ), ( $h_{\alpha\beta}$ ) și ( $h_{\rho\gamma}$ ) sunt satisfăcute. Dacă  $r = q$  și presupunerea ( $h$ ) are loc, atunci constantele  $\Lambda_q$  și  $\lambda_0$  definite în (2.7) sunt pozitive. Mai mult,  $\Lambda_q < \lambda_0$  și orice  $\lambda \in (\Lambda_q, \lambda_0)$  este o valoare proprie a problemei (2.1). În plus, problema (2.1) are doar soluții triviale pentru  $\lambda$  în intervalul  $(-\infty, \Lambda_q]$ .

**Teorema 2.1.2** ([4]). *Presupunem că ipotezele  $(h_{pqr})$ ,  $(h_{\alpha\beta})$  și  $(h_{\rho\gamma})$  sunt satisfăcute. În fiecare dintre următoarele cazuri*

- (a)  $r = p$ ;
- (b)  $\max\{p, q\} < r < \max\{p_*, q_*\}$ ;
- (c)  $r < \min\{p, q\}$ ;
- (d)  $p < r < q$ ,

*mulțimea de valori proprii ale problemei (2.1) este intervalul  $(0, \infty)$ .*

**Teorema 2.1.3** ([4]). *Presupunem că ipotezele  $(h_{pqr})$ ,  $(h_{\alpha\beta})$  și  $(h_{\rho\gamma})$  sunt satisfăcute. Dacă  $r = q$  sau  $q < r < p$ , atunci pentru orice  $\sigma > 0$  problema (2.1) are o infinitate de soluții perechi proprii de forma*

$$(\lambda_n, \pm u_n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_\sigma \text{ cu } \lambda_n \rightarrow \infty \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

## 2.2 Rezultate auxiliare

Pentru claritate și concizie, folosim următoarele notații

$$K_\xi(u) := \int_\Omega |\nabla u|^\xi, \quad \xi \in \{p, q\}, \quad k_q(u) := \int_\Omega \rho |u|^q + \int_{\partial\Omega} \gamma |u|^q, \quad u \in W. \quad (2.9)$$

În continuare, enunțăm un rezultat auxiliar necesar pentru demonstrarea teoremelor enunțate anterior.

Pentru  $\theta > 1$ , considerăm următoarea problemă de valori proprii

$$\begin{cases} -\Delta_\theta u + \rho(x) |u|^{\theta-2} u = \lambda \alpha(x) |u|^{\theta-2} u & \text{în } \Omega, \\ |\nabla u|^{\theta-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma(x) |u|^{\theta-2} u = \lambda \beta(x) |u|^{\theta-2} u & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.10)$$

Definim funcțională de clasă  $C^1$

$$\Theta : W^{1,\theta}(\Omega) \setminus \mathcal{Z}_\theta \rightarrow (0, \infty), \quad \Theta(u) := \frac{K_\theta(u) + k_\theta(u)}{j_\theta(u)} \quad \forall u \in W^{1,\theta}(\Omega) \setminus \mathcal{Z}_\theta.$$

Următoarea leamnă oferă o caracterizare importantă a valorii minime a funcționalei  $\Theta$  pe mulțimea  $W^{1,\theta}(\Omega) \setminus \mathcal{Z}_\theta$ .

**Lema 2.2.1** ([4]). *Există  $u_* \in W^{1,\theta}(\Omega) \setminus \mathcal{Z}_\theta$  astfel încât*

$$\Theta(u_*) = \lambda_\theta := \inf_{u \in W^{1,\theta}(\Omega) \setminus \mathcal{Z}_\theta} \Theta(u) > 0. \quad (2.11)$$

*Mai mult,  $\lambda_\theta$  este cea mai mică valoare proprie a problemei (2.10), iar  $u_*$  este o funcție proprie corespunzătoare valorii proprii  $\lambda_\theta$ .*

## 2.3 Demonstrația Teoremelor 2.1.1 și 2.1.2

Demonstrarea rezultatelor din această secțiune se va realiza cu ajutorul unor leme intermediare, în cadrul cărora vom presupune că ipotezele  $(h_{pqr})$ ,  $(h_{\alpha\beta})$  și  $(h_{\rho\gamma})$  sunt îndeplinite. În plus, în cazul particular  $r = q$ , vom considera că este satisfăcută și ipoteza  $(h)$ .

**Lema 2.3.1** ([4]). *Dacă  $r = q$ , atunci  $\Lambda_q > 0$  și nu există valori proprii ale problemei (2.1) în intervalul  $(-\infty, \Lambda_q]$ . Mai mult,*

$$\Lambda_q = \tilde{\Lambda}_q := \inf_{u \in W \setminus \mathcal{Z}} \frac{\frac{1}{q}(K_q(u) + k_q(u)) + \frac{1}{p}K_p(u)}{\frac{1}{q}j_q(u)}. \quad (2.12)$$

Următoarea leamnă exprimă o relație de inegalitate între constantele variaționale definite în (2.7).

**Lema 2.3.2** ([4]). *Dacă  $r = q$ , atunci  $\Lambda_q < \lambda_0$ .*

Fie  $\lambda > 0$ . Considerăm funcționala  $\mathcal{J}_{r\lambda} : W \rightarrow \mathbb{R}$ , de clasă  $C^1$  definită astfel

$$\mathcal{J}_{r\lambda}(u) = \frac{1}{p}K_p(u) + \frac{1}{q}(K_q(u) + k_q(u)) - \frac{\lambda}{r}j_r(u). \quad (2.13)$$

În ceea ce privește coercivitatea funcționalei  $\mathcal{J}_{r\lambda}$ , avem următorul rezultat.

**Lema 2.3.3** ([4]). *Presupunem că este îndeplinită una dintre următoarele două condiții:*

- (i)  $1 < r < q$  și  $\lambda > 0$ ;
- (ii)  $r = q < p$  și  $\lambda \in (\Lambda_q, \lambda_0)$ .

*Atunci funcționala  $\mathcal{J}_{r\lambda}$  este coercivă pe spațiul  $W$ , echivalent*

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{r\lambda}(u) = \infty.$$

Presupunând că sunt îndeplinite condițiile din Lema 2.3.3 obținem următorul rezultat privind existența valorilor proprii pentru problema (2.1).

**Lema 2.3.4** ([4]). (i) *Dacă  $r < q$ , atunci orice număr real  $\lambda > 0$  este o valoare proprie a problemei (2.1);*

(ii) *Dacă  $r = q < p$ , atunci orice număr real  $\lambda \in (\Lambda_q, \lambda_0)$  este o valoare proprie a problemei (2.1).*

În continuare vom prezenta cazurile complementare cazurilor considerate în Lema 2.3.4.

Dacă  $r > q$  sau  $r = q > p$ , nu ne putem aștepta ca funcționala  $\mathcal{J}_{r\lambda}$  să rămână coercivă pe  $W$ . De aceea, pentru  $\lambda > 0$ , vom considera varietatea Nehari asociată acesteia, definită astfel

$$\mathcal{N}_{r\lambda} = \{u \in W \setminus \{0\}; \langle \mathcal{J}'_{r\lambda}(u), u \rangle = K_p(u) + K_q(u) + k_q(u) - \lambda j_r(u) = 0\}.$$

**Lema 2.3.5** ([4]). *Presupunem că este îndeplinită una dintre următoarele două ipoteze:*

- (i)  $r = q > p$  și  $\lambda \in (\Lambda_q, \lambda_0)$ ;
- (ii)  $r \neq q$ ,  $\max\{p, q\} \leq r < \max\{p_*, q_*\}$  și  $\lambda > 0$ , unde  $p_*$  și  $q_*$  sunt exponenții critici de urmă.

*Atunci există  $u_* \in \mathcal{N}_{r\lambda}$  în care funcționala  $\mathcal{J}_{r\lambda}$  își atinge valoarea minimă pe varietatea  $\mathcal{N}_{r\lambda}$ , adică*

$$m_{r\lambda} := \inf_{u \in \mathcal{N}_{r\lambda}} \mathcal{J}_{r\lambda}(u) > 0.$$

Ultimul rezultat necesar pentru demonstrarea Teoremelor 2.1.1 și 2.1.2 arată că minimumul  $u_* \in \mathcal{N}_{r\lambda}$  obținut în Lema 2.3.5 este, de fapt, un punct critic al funcționalei  $\mathcal{J}_{r\lambda}$ .

**Lema 2.3.6** ([4]). (i) *Dacă  $r = q > p$ , atunci orice număr real  $\lambda \in (\Lambda_q, \lambda_0)$  este o valoare proprie a problemei (2.1);*

- (ii) Dacă  $r \neq q$  și  $\max\{p, q\} \leq r < \max\{p_*, q_*\}$ , atunci orice număr real  $\lambda \in (0, \infty)$  este o valoare proprie a problemei (2.1).

Concluzionând, folosind Lema 2.3.4 și Lema 2.3.6, Teoremele 2.1.1 și 2.1.2 sunt complet demonstrate.

## 2.4 Demonstrația Teoremei 2.1.3

Vom analiza cazul  $q < r < p$  în care funcționala  $\mathcal{J}_{r\lambda}$  nu mai este nici coercivă pe spațiul  $W$  și nici mărginită inferior pe varietatea  $\mathcal{N}_{r\lambda}$ .

Dacă  $r = q$  și  $\lambda \geq \lambda_0$ , după cum am observat în secțiunea anterioară, va trebui să considerăm și alte argumente pentru a deduce faptul că problema (2.1) are valori proprii  $\lambda \geq \lambda_0$ .

Ca urmare, pentru a obține rezultatul de multiplicitate enunțat în Teorema 2.1.3, vom utiliza noțiunea de genus în sensul lui Krasnosel'skiĭ.

Una dintre cele mai importante proprietăți ale varietății  $\mathcal{M}_\sigma$  este enunțată în următorul rezultat.

**Lema 2.4.1** ([4]). *Pentru orice număr întreg pozitiv  $k$ , există o mulțime compactă, simetrică  $K \subset \mathcal{M}_\rho$  astfel încât  $\gamma(K) = k$ .*

Considerăm următoarea funcțională  $\mathcal{J} : W \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$\mathcal{J} : W \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{J}(u) = \frac{1}{p}K_p(u) + \frac{1}{q}(K_q(u) + k_q(u)) \quad \forall u \in W. \quad (2.14)$$

O proprietate importantă a funcționalei definite anterior este dată de următoarea lemă.

**Lema 2.4.2** ([4]). *Dacă  $r = q$  sau  $q < r < p$ , atunci funcționala  $\mathcal{J}$  definită în (2.14) restricționată la  $\mathcal{M}_\sigma$  satisface condiția Palais–Smale (echivalent, orice șir  $(u_n)_n \subset \mathcal{M}_\sigma$  cu proprietatea că șirul  $(\mathcal{J}(u_n))_n$  este mărginit și  $\mathcal{J}'_{\mathcal{M}_\sigma}(u_n) \rightarrow 0$ , are un subșir convergent).*

În final, folosind Principiul Lusternik–Schnirelmannse și lemele de mai sus, se poate concluziona că există o infinitate de puncte critice  $\pm u_n$   $n \geq 1$ , pentru funcționala  $\mathcal{J}$  în  $\mathcal{M}_\sigma$ . Acestor puncte critice  $\pm u_n$  le sunt asociați multiplicatorii lui Lagrange  $\lambda_n$ , rezultând astfel o infinitate de perechi proprii ale problemei (2.1), de forma:

$$(\lambda_n, \pm u_n) \in (0, \infty) \times \mathcal{M}_\sigma \quad n \geq 1.$$

În plus, șirul  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , ceea ce conduce la demonstrarea completă a Teoremei 2.1.3.

# Capitolul 3

## O problemă neliniară de valori proprii de transmisie cu o condiție pe frontieră de tip Neumann-Robin

Acest capitol reunește o serie de rezultate obținute în colaborare cu L. Barbu și G. Moroșanu, publicate în *Math. Methods Appl. Sci.* [3].

Dintre ele, amintim: Teorema 3.1.1, Lemele 3.2.1, 3.2.2, precum și Lemele 3.3.1–3.3.3.

În scopul simplificării notațiilor, vom omite notațiile  $dx$  și  $d\sigma$  în integrale, atunci când contextul este clar și nu apare ambiguitate.

### 3.1 Formularea problemei și prezentarea rezultatelor principale

În această secțiune reamintim problema prezentată în Introducere, formulăm notațiile necesare și enunțăm rezultatul principal al capitolului.

Fie  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$  un domeniu mărginit care are frontiera netedă  $\Sigma$  și  $\Omega_1$  un subdomeniu cu frontiera netedă  $\Gamma$ , astfel încât  $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ , iar  $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$ .

Considerăm în  $\Omega$  următoarea problemă de valori proprii de transmisie

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 + \gamma_1(x) |u_1|^{r-2} u_1 = \lambda |u_1|^{p-2} u_1 & \text{în } \Omega_1, \\ -\Delta_q u_2 + \gamma_2(x) |u_2|^{s-2} u_2 = \lambda |u_2|^{q-2} u_2 & \text{în } \Omega_2, \\ u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu_p} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu_q} & \text{pe } \Gamma, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \nu} + \beta(x) |u_2|^{\zeta-2} u_2 = 0 & \text{pe } \Sigma, \end{cases} \quad (3.1)$$

unde  $\lambda$  este un parametru real.

Pe parcursul capitolului, presupunem că sunt valabile următoarele ipoteze:

$$\begin{aligned} & p, q, r, s, \zeta \in (1, \infty), \quad p \leq q, \quad \zeta < q_*; \\ (h_1) \quad & r < p \left(1 + \frac{p}{N}\right) \quad \text{dacă } r > p \text{ și } p < N; \\ & s < q \left(1 + \frac{q}{N}\right) \quad \text{dacă } s > q \text{ și } q < N. \end{aligned} \quad (3.2)$$

( $h_2$ )  $\gamma_i \in L^\infty(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\beta \in L^\infty(\Sigma)$ ,  $\beta \geq 0$  a.p.t. pe  $\Sigma$ .

Pentru  $1 < \theta \leq \infty$ , vom nota normele uzuale ale spațiilor Lebesgue  $L^\theta(\Omega_i)$  și  $L^\theta(\Sigma)$  cu  $\|\cdot\|_{i\theta}$ ,  $i = 1, 2$ , respectiv  $\|\cdot\|_{\partial\theta}$ .

Evident, soluțiile  $u = (u_1, u_2)$  ale problemei (3.1) aparțin spațiului

$$W := \{u \in W^{1,p}(\Omega); u|_{\Omega_2} \in W^{1,q}(\Omega_2)\},$$

unde  $u_i = u|_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Pe  $W$  considerăm norma uzuală

$$\|u\| := \|u_1\|_1 + \|u_2\|_2 \quad \forall u = (u_1, u_2) \in W, \quad (3.3)$$

unde  $\|\cdot\|_i$ ,  $i = 1, 2$ , sunt definite prin

$$\|u_1\|_1 := \|\nabla u_1\|_{1p} + \|u_1\|_{1p}, \quad \|u_2\|_2 := \|\nabla u_2\|_{2q} + \|u_2\|_{2q}. \quad (3.4)$$

Spațiul  $W$  definit anterior se identifică cu spațiul

$$\widetilde{W} := \{\tilde{u} = (u_1, u_2) \in W^{1,p}(\Omega_1) \times W^{1,q}(\Omega_2); u_1 = u_2 \text{ pe } \Gamma\}, \quad (3.5)$$

ceea ce implică faptul că  $W$  este un spațiu Banach reflexiv.

**Definiția 3.1.1.** Numărul real  $\lambda$  se numește valoare proprie a problemei (3.1) dacă aceasta admite o soluție slabă  $\tilde{u}_\lambda = (u_{1\lambda}, u_{2\lambda}) \in \widetilde{W} \setminus \{(0, 0)\}$ .

În acest caz,  $\tilde{u}_\lambda$  se numește funcție proprie asociată valorii proprii  $\lambda$ , iar perechea  $(\lambda, \tilde{u}_\lambda)$  se numește pereche proprie a problemei (3.1).

Următorul rezultat rezultă folosind un raționament similar celui folosit în [9, Proposition 1.1]. El oferă o caracterizare a valorilor proprii ale problemei (3.1).

**Propoziția 3.1.1** ([3]). Numărul real  $\lambda$  este o valoare proprie a problemei (3.1) dacă și numai dacă există  $\tilde{u}_\lambda = (u_{1\lambda}, u_{2\lambda}) \in \widetilde{W} \setminus \{(0, 0)\}$ , astfel încât pentru orice  $(v_1, v_2) \in \widetilde{W}$  are loc egalitatea

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} |\nabla u_{1\lambda}|^{p-2} \nabla u_{1\lambda} \cdot \nabla v_1 + \int_{\Omega_2} |\nabla u_{2\lambda}|^{q-2} \nabla u_{2\lambda} \cdot \nabla v_2 \\ & + \int_{\Omega_1} \gamma_1 |u_{1\lambda}|^{r-2} u_{1\lambda} v_1 + \int_{\Omega_2} \gamma_2 |u_{2\lambda}|^{s-2} u_{2\lambda} v_2 + \int_{\Sigma} \beta |u_{2\lambda}|^{\zeta-2} u_{2\lambda} v_2 \, d\sigma \\ & = \lambda \left( \int_{\Omega_1} |u_{1\lambda}|^{p-2} u_{1\lambda} v_1 + \int_{\Omega_2} |u_{2\lambda}|^{q-2} u_{2\lambda} v_2 \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Fie  $\rho > 0$ . Considerăm submulțimea  $\mathcal{M}_\rho$  a spațiului  $\widetilde{W}$ , pe care o definim astfel

$$\mathcal{M}_\rho := \left\{ \tilde{u} = (u_1, u_2) \in \widetilde{W}; \frac{1}{p} \int_{\Omega_1} |u_1|^p + \frac{1}{q} \int_{\Omega_2} |u_2|^q = \rho \right\}. \quad (3.7)$$

Rezultatul principal al acestui capitol este următoarea teoremă.

**Teorema 3.1.1.** ([3]). Presupunem că ipotezele ( $h_1$ ) și ( $h_2$ ) sunt îndeplinite. Atunci, pentru orice  $\rho > 0$ , există un șir de perechi proprii  $(\lambda_n, \pm(u_{1n}, u_{2n}))_n$  ale problemei (3.1), cu  $((u_{1n}, u_{2n}))_n \subset \mathcal{M}_\rho$  și  $\lambda_n \rightarrow \infty$  când  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.2 Rezultate auxiliare

În această secțiune vom prezenta câteva proprietăți ale mulțimii  $\mathcal{M}_\rho$ , definită în (3.7), care sunt utilizate în demonstrarea rezultatului principal.

Introducem următoarele notații:

$$\begin{aligned} K_{pq}(u_1, u_2) &:= \frac{1}{p} \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^p + \frac{1}{q} \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^q, \\ k_{rs\zeta}(u_1, u_2) &:= \frac{1}{r} \int_{\Omega_1} \gamma_1 |u_1|^r + \frac{1}{s} \int_{\Omega_2} \gamma_2 |u_2|^s + \frac{1}{\zeta} \int_{\Sigma} |u_2|^\zeta, \\ j_{pq}(u_1, u_2) &:= \frac{1}{p} \int_{\Omega_1} |u_1|^p + \frac{1}{q} \int_{\Omega_2} |u_2|^q \quad \forall (u_1, u_2) \in \widetilde{W}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Definim funcționala de clasă  $C^1$ ,  $\mathcal{J} : \widetilde{W} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{J}(\tilde{u}) = K_{pq}(u_1, u_2) + k_{rs\zeta}(u_1, u_2) \quad \forall \tilde{u} = (u_1, u_2) \in \widetilde{W}. \quad (3.9)$$

Evident, funcția  $j_{pq} : W \rightarrow \mathbb{R}$  este de clasă  $C^1$ . Datorită faptului că, pentru orice  $\tilde{u} = (u_1, u_2) \in \mathcal{M}_\rho$ , avem  $\langle j'_{pq}(\tilde{u}), \tilde{u} \rangle \neq 0$ , deducem că  $\rho$  este o valoare regulată a acesteia. Prin urmare,  $\mathcal{M}_\rho = j_{pq}^{-1}(\rho)$  este o subvarietate Banach de clasă  $C^1$  în  $\widetilde{W}$ , având codimensiunea 1. În plus, spațiul tangent într-un punct  $\tilde{u} = (u_1, u_2) \in \mathcal{M}_\rho$  este dat de egalitatea

$$T_{\tilde{u}}\mathcal{M}_\rho = \ker j'_{pq}(\tilde{u}). \quad (3.10)$$

Definim funcționala de clasă  $C^1$ ,  $\mathcal{J} : \widetilde{W} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{J}(\tilde{u}) = K_{pq}(u_1, u_2) + k_{rs\zeta}(u_1, u_2) \quad \forall \tilde{u} = (u_1, u_2) \in \widetilde{W}. \quad (3.11)$$

În mod evident,  $\mathcal{J} \in C^1(\mathcal{M}_\rho, \mathbb{R})$ . Notăm  $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_\rho}$  restricția funcționalei  $\mathcal{J}$  la  $\mathcal{M}_\rho$  și  $\mathcal{J}'_{\mathcal{M}_\rho}(\tilde{u})$  diferențiala lui  $\mathcal{J}$  în  $\tilde{u} \in \mathcal{M}_\rho$  relativă la  $\mathcal{M}_\rho$ , adică restricția lui  $\mathcal{J}'(\tilde{u})$  la spațiul tangent  $T_{\tilde{u}}\mathcal{M}_\rho$ .

**Lema 3.2.1** ([3]). *În orice punct  $\tilde{u} \in \mathcal{M}_\rho$ , diferențiala lui  $\mathcal{J}$  relativă la  $\mathcal{M}_\rho$  satisface egalitatea*

$$\mathcal{J}'_{\mathcal{M}_\rho}(\tilde{u}) = \mathcal{J}'(\tilde{u}) - \lambda(\tilde{u}) j'_{pq}(\tilde{u}), \quad \text{unde } \lambda(\tilde{u}) = \frac{\langle \mathcal{J}'(\tilde{u}), \tilde{u} \rangle}{\langle j'_{pq}(\tilde{u}), \tilde{u} \rangle}. \quad (3.12)$$

Următoarea leamnă stabilește faptul că  $\mathcal{M}_\rho$  are genusul infinit.

**Lema 3.2.2** ([3]). *Pentru orice număr întreg pozitiv  $k$  există o submulțime simetrică și compactă  $K \subset \mathcal{M}_\rho$  astfel încât  $\gamma(K) = k$ .*

### 3.3 Demonstrația Teoremei 3.1.1

În această secțiune presupunem că ipotezele  $(h_1)$  și  $(h_2)$  sunt îndeplinite și le vom utiliza fără a le mai menționa ulterior.

Demonstrația Teoremei 3.1.1 va rezulta ca o consecință a unor rezultate intermediare.

**Lema 3.3.1** ([3]). *Funcționala  $\mathcal{J}_{\mathcal{M}_\rho}$  este coercivă, adică*

$$\lim_{\|(u_1, u_2)\| \rightarrow \infty, (u_1, u_2) \in \mathcal{M}_\rho} \mathcal{J}(u_1, u_2) = \infty.$$



Un rol important în demonstrarea rezultatului principal îl are următoarea inegalitate.

**Lema 3.3.2** ([3]). *Fie  $\mathcal{K} := K'_{pq} : \widetilde{W}^* \rightarrow \mathbb{R}$  derivata funcționalei  $K_{pq}$  definită în (3.8)<sub>1</sub>. Atunci, pentru orice  $\tilde{u} = (u_1, u_2), \tilde{v} = (v_1, v_2) \in \widetilde{W}$  are loc următoarea inegalitate*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}(\tilde{u}) - \mathcal{K}(\tilde{v}), u - v \rangle & \geq ( \| \nabla u_1 \|_{1p}^{p-1} - \| \nabla v_1 \|_{1p}^{p-1} ) ( \| \nabla u_1 \|_{1p} - \| \nabla v_1 \|_{1p} ) \\ & + ( \| \nabla u_2 \|_{2q}^{q-1} - \| \nabla v_2 \|_{2q}^{q-1} ) ( \| \nabla u_2 \|_{2q} - \| \nabla v_2 \|_{2q} ) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Lema 3.3.3** ([3]). *Funcționala  $\mathcal{J}$  satisface condiția Palais–Smale în raport cu varietatea  $\mathcal{M}_\rho$ .*

Existența unui număr infinit de puncte critice  $\pm \tilde{u}_n$  ( $n \geq 1$ ) pentru funcționala  $\mathcal{J}$  pe mulțimea  $\mathcal{M}_\rho$  este o consecință a Lemelor 3.2.2, 3.3.1, 3.3.3 și a Teoremei Lusternik–Schnirelmann.

Fiecărui punct critic  $\pm \tilde{u}_n$  ( $n \geq 1$ ) i se asociază un multiplicator Lagrange  $\lambda_n$ , ceea ce conduce la o infinitate de perechi proprii  $(\lambda_n, \pm \tilde{u}_n)$ , ( $n \geq 1$ ), ale problemei (3.1).

În final, se arată că  $\lambda_n \rightarrow \infty$  și astfel demonstrația Teoremei 3.1.1 este completă.

## Concluzii generale

### Cuvânt de încheiere

Rezultatele obținute în această teză contribuie la extinderea teoriei spectrale pentru operatori neliniari de tip  $(p, q)$ -Laplacian, în prezența unor potențiali de ordin  $q$  și/sau  $p$ , precum și a condițiilor la limită generalizate. Studiul celor două probleme, prezentate în Capitolele 1 și 2, a permis obținerea unor caracterizări complete sau parțiale ale spectrului, prin aplicarea unor metode variaționale combinate, adaptate contextului considerat.

Mai mult, analiza, în Capitolul 3, a unei probleme de transmisie neliniară, în care operatorii  $p$ - și  $q$ -Laplacian acționează pe subdomenii diferite, a permis tratarea unui subiect mai puțin investigat în literatură, dar cu potențial teoretic important.

### Direcții viitoare de cercetare

Rezultatele prezentate în această teză oferă mai multe direcții posibile de continuare a cercetării. Printre acestea menționăm:

- (i) Obținerea unor rezultate similare celor din Capitolele 1 și 2 în cazul în care se introduc potențiali cu ponderi indefinite (mai exact, care pot schimba semnul). În astfel de cazuri, o parte dintre argumentele folosite în lucrare nu mai pot fi aplicate, deci este necesară utilizarea altor tehnici;
- (ii) Analiza unor probleme de transmisie cu mai multe subdomenii și operatori eliptici diferiți în fiecare subdomeniu, inclusiv cazuri în care subdomeniile interacționează prin condiții neliniare de flux;
- (iii) Investigarea problemelor de valori proprii asociate operatorilor din această lucrare în contextul domeniilor nemărginite, de exemplu, pe  $\mathbb{R}^N$  sau pe  $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ , unde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  este un domeniu mărginit.

### Diseminarea rezultatelor

Rezultatele obținute în cadrul acestei teze au fost diseminate prin următoarele articole publicate și prezentări la conferințe:

#### Articole publicate

L. Barbu, **A. Burlacu**, G. Moroșanu, *An eigenvalue problem involving the  $(p, q)$ -Laplacian with a parametric boundary condition*, Mediterr. J. Math. **20**(4), art. no. 232, 2023 (Q1 quartilă JIF, Q2 quartilă AIS).  
<https://doi.org/10.1007/s00009-023-02431-0>

L. Barbu, **A. Burlacu**, G. Moroșanu, *On a nonlinear transmission eigenvalue problem with a Neumann–Robin boundary condition*, Math. Methods Appl. Sci., **46**(17), 18375-18386, 2023 (Q1 quartilă JIF, Q3 quartilă AIS).  
<https://doi.org/10.1002/mma.9563>

L. Barbu, **A. Burlacu**, G. Moroșanu, *On an eigenvalue problem associated with the  $(p, q)$ -Laplacian*, An. Șt. Univ. Ovidius Constanța, **32**(1), 45–63, 2024 (Q2 quartilă JIF, Q4 quartilă AIS).  
<https://doi.org/10.2478/auom-2024-0003>

## Prezentări la conferințe

### Conferințe internaționale

*Eigenvalues of  $(p, q)$ -Laplacian under Robin-Steklov Boundary Condition*, The 10th International Scientific Conference-Sea Conf, Academia Navală Mircea cel Bătrân, 16-18 mai 2024 (prezentare orală);  
<https://www.anmb.ro/ro/conferinte/sea-conf/>

*Continuous Spectrum for an Eigenvalue Problem Governed by the  $(p, q)$ -Laplacian*, ICATA-International Conference on Approximation Theory and Its Applications, Universitatea Lucian Blaga din Sibiu, 17-20 iulie 2024 (prezentare orală);  
<https://conferences.ulbsibiu.ro/icata/>

*On a Nonlinear Transmission Eigenvalue Problem*, The 11th International Scientific Conference-Sea Conf, Academia Navală Mircea cel Bătrân, 15-17 mai 2025 (prezentare orală);  
<https://www.anmb.ro/ro/conferinte/sea-conf/>

*Transmission Eigenvalue Problems with Neumann-Robin Boundary Conditions Involving the  $p$ - and  $q$ -Laplacian*, The 6th International Conference on Mathematics and Its Applications in Science and Engineering, Universitatea din Plovdiv, 15-17 iulie 2025 (prezentare orală);  
<https://www.icmase.com/>

*Analysis of a Generalized Robin-Steklov Eigenvalue Problem with  $(p, q)$ -Laplacian*, The 6th International Conference on Mathematics and Its Applications in Science and Engineering, Universitatea din Plovdiv, 15-17 iulie 2025 (prezentare orală).  
<https://www.icmase.com/>

### Conferințe naționale

*An Eigenvalue Problem Involving the  $(p, q)$ -Laplacian with a Parametric Boundary Condition*, Sesiunea de Comunicări Matematice, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea Ovidius din Constanța, 10 decembrie 2022 (prezentare orală);  
<https://fmi.univ-ovidius.ro/sesiunea-de-comunicari-matematice-2022/>

*On an Eigenvalue Problem Associated with the  $(p, q)$ -Laplacian*, Sesiunea de Comunicări Matematice, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea Ovidius din Constanța, 9 decembrie 2023 (prezentare orală).  
<https://fmi.univ-ovidius.ro/sesiunea-de-comunicari-matematice-2023/>

## Bibliografie selectivă

- [1] J. Abreu, G. Madeira, *Generalized eigenvalues of the  $(p, 2)$ -Laplacian under a parametric boundary condition*, Proc. Edinb. Math. Soc., **63**(1)(2020), 287-303.
- [2] L. Barbu, **A. Burlacu**, G. Moroşanu, *On an eigenvalue problem associated with the  $(p, q)$ -Laplacian*, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **32**(1)(2024), 45–63.
- [3] L. Barbu, **A. Burlacu**, G. Moroşanu, *On a nonlinear transmission eigenvalue problem with a Neumann–Robin boundary condition*, Math. Meth. Appl. Sci., **46**(17)(2023), 18375-18386.
- [4] L. Barbu, **A. Burlacu**, G. Moroşanu, *An eigenvalue problem involving the  $(p, q)$ -Laplacian with a parametric boundary condition*, Mediterr. J. Math., **20**(4)(2023), art. no. 232.
- [5] L. Barbu, G. Moroşanu, *On eigenvalue problems governed by the  $(p, q)$ -Laplacian*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **68**(1) (2023).
- [6] L. Barbu, G. Moroşanu, *On the eigenvalue set of the  $(p, q)$ -Laplacian with a Neumann-Steklov boundary condition*, Diff. Int. Eq. , **36**(5/6)(2023), 437-452.
- [7] L. Barbu, G. Moroşanu, *Full Description of the Eigenvalue Set of the  $(p, q)$ -Laplacian with a Steklov-like Boundary Condition*, J. Differential Equations, **290**(2021), 1-16.
- [8] L. Barbu, G. Moroşanu, *On a Steklov Eigenvalue Problem Associated With the  $(p, q)$ -Laplacian*, Carpathian J. Math., **37**(2021), 161-171.
- [9] L. Barbu, G. Moroşanu, C. Pinte, *A Nonlinear Elliptic Eigenvalue–Transmission Problem with Neumann Boundary Condition*, Ann. Mat. Pura Appl., **198**(2019), 821–836.
- [10] V. Barbu, M. Rehmeier, M. Rockner,  *$p$ -brownian motion and the  $p$ -laplacian* Preprint. arXiv:2409.18744
- [11] R. Bartnik, L. Simon, *Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature*, Commun. Math. Phys., **87**(1982), 131–152.
- [12] J. Von Below, G. François, *Spectral Asymptotic for the Laplacian under a Eigenvalue Dependent Boundary Condition*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **12**(4)(2005), 505-519.
- [13] V. Benci, P. D'Avenia, D. Fortunato, et al, *Solitons in Several Space Dimensions: Derrick's Problem and Infinitely Many Solutions*, Arch. Ration. Mech. Anal., **154**(2000), 297-324.
- [14] V. Benci, D. Fortunato, L. Pisani, *Solitons Like Solutions of a Lorentz Invariant Equation in Dimension 3*, Rev. Math. Phys., **10**(1998), 315–344.
- [15] J. Benedikt, P. Girg, L. Kotrla, P. Tákač, *Origin of the  $p$ -Laplacian and A. Missbach*. Electron. J. Differential Equations, (2018) 1–17.
- [16] D. Bonheure, F. Colasuonno, J. Földes, *On the Born-Infeld Equation for Electrostatic Fields with a Superposition of Point Charges*, Ann. Mat. Pura Appl., **198**(3) (2019), 749-772.
- [17] L. Cherfils, Y. Il'yasov, *On the Stationary Solutions of Generalized Reaction Diffusion Equations with  $p$ - $q$ -Laplacian*, Commun. Pure Appl. Anal., **4**(2005), 9-22.
- [18] N. Costea, G. Moroşanu, *Steklov-type eigenvalues of  $\Delta_p + \Delta_q$* , Pure Appl. Funct. Anal., **3**(1)(2018), 75-89.
- [19] M. Fărcaşeanu, M. Mihăilescu, D. Stancu-Dumitru, *On the set of eigenvalues of some PDEs with homogeneous Neumann boundary condition*, Nonlinear Anal., **116**(2015), 19-25.
- [20] P.C. Fife, *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces*, Society for industrial and applied mathematics, 1988.
- [21] G. M. Figueiredo, M. Montenegro, *A Transmission Problem on  $\mathbb{R}^2$  with Critical Exponential Growth*, Arch. Math., **99**(3)(2012), 271–279.

- [22] G.M. Figueiredo, M. Montenegro, *On a Nonlinear Elliptic Transmission Problem with Critical Growth*, J. Convex Anal., **20**(2013), 947–954.
- [23] G. M. Figueiredo, G. Siciliano, *Normalized Solutions for an Horizontal Transmission Problem*, Appl. Anal., **100**(15)(2021), 3174–3181.
- [24] D. Fortunato, L. Orsina, L. Pisani, *Born-Infeld Type Equations for Electrostatic Fields*, J. Math. Phys., **43**(2002), 5698–5706.
- [25] G. François, *Spectral Asymptotics Stemming from Parabolic Equations under Dynamical Boundary Conditions*, Asymptot. Anal., **46**(1)(2006), 43–52.
- [26] L. Gasinski, N.S. Papageorgiou, *Nonlinear Analysis*, Chapman and Hall/CRC Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2005.
- [27] T. Gyulov, G. Moroşanu, *Eigenvalues of  $-(\Delta_p + \Delta_q)$  under a Robin-like Boundary Condition*, Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl., **8**(2016), 114–131.
- [28] A. Lê, *Eigenvalue Problems for  $p$ -Laplacian*, Nonlinear Anal., **64**(2006), 1057–1099.
- [29] P. Lindqvist, *Notes on the Stationary  $p$ -Laplace Equation*, Springer, Cham, 2019.
- [30] S.A. Marano, S. Mosconi, *Some recent results on the Dirichlet problem for  $(p, q)$ -Laplace equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **11**(2018), 279–291.
- [31] P. Marcellini, *Regularity and Existence of Solutions of Elliptic Equations with  $p, q$ -growth Conditions*, J. Differ. Equ., **90**(1991), 1–30.
- [32] M. Mihăilescu, *An eigenvalue problem possessing a continuous family of eigenvalues plus an isolated eigenvalue*, Commun. Pure Appl. Anal., **10**(2011), 701–708.
- [33] M. Mihăilescu, G. Moroşanu, *Eigenvalues of  $-\Delta_p - \Delta_q$  under Neumann boundary condition*, Canadian Math. Bull., **59**(3)(2016), 606–616.
- [34] D. Motreanu, V. V. Motreanu, N.S. Papageorgiou, *Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems*, Springer, New York (2014).
- [35] S. Nicaise, *Polygonal interface problems*, Lang, 1993.
- [36] N.S. Papageorgiou, C. Vetro, F. Vetro, *Continuous Spectrum for a Two Phase Eigenvalue Problem with an Indefinite and Unbounded Potential*, J. Diff. Equ., **268**(2020), 4102–4118.
- [37] S.I. Pohozaev, *The fibering method and its applications to nonlinear boundary value problem*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **31**(1–2)(1999), 235–305.
- [38] A. Pomponio, T. Watanabe, *Some quasilinear elliptic equations involving multiple  $p$ -Laplacians*, Indiana Univ. Math. J., **67**(6)(2018) 2199 – 2224.
- [39] V.V. Zhikov, *Averaging of Functionals of the Calculus of Variations and Elasticity Theory*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **50**(1986), 675–710; English translation in Math. USSR-Izv., **29**(1987), 33–66.