

UNIVERSITATEA OVIDIUS DIN CONSTANȚA

ȘCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

DOMENIUL DE DOCTORAT MATEMATICĂ

REZUMAT TEZĂ DE DOCTORAT

Relații de recurență liniare de gradul n și unele din aplicațiile lor

Coordonator științific,
Dr.habil.Prof.Univ.
Cristina FLAUT

Student-doctorand,
Mariana-Geanina TUDOR
(căsătorită ZAHARIA)

CONSTANȚA, 2024

Cuprins

1	Introducere	3
1.1	Motivație	3
1.2	Starea actuală a cercetărilor în domeniile numerelor Fibonacci și criptografiei	8
1.3	Structura lucrării	11
2	Preliminarii	20
2.1	Soluțiile ecuației caracteristice	20
2.2	Relații de recurență cunoscute	22
2.3	Cele mai importante identități	24
2.4	Proprietățile numerelor Fibonacci, Pell și Lucas	25
2.5	Definiția cuaternionilor, octonionilor, cuaternioni Fibonacci și Fi- bonacci generalizați	26
2.6	Norma elementelor de tip cuaternioni Fibonacci	28
2.7	Proprietăți elementare ale numerelor Fibonacci și Lucas	31
2.8	Proprietăți ale rădăcinilor într-o algebră generalizată de cuaternioni	33
	2.8.1 Formula lui De Moivre pentru cuaternioni	34
	2.8.2 Observații cu privire la ecuațiile peste octonioni	35
2.9	Aspecte computaționale în algebrele obținute prin procedeul Cayley- Dickson	37
3	Secvențe speciale de numere întregi și unele dintre aplicațiile lor	40
3.1	Noi proprietăți ale secvențelor speciale de numere întregi	40
3.2	Perioada Pisano	43
3.3	Aplicații în Criptografie	47
	3.3.1 CriptoMatrice	47
	3.3.2 CriptoBlocareCheie	54
3.4	Observații privind algebrele obținute prin procedeul Cayley-Dickson	65
4	Unele aplicații ale elementelor speciale definite în algebrele de cuaternioni	69
4.1	Proprietăți și relații ale șirurilor Fibonacci și Lucas	69

4.2	Noi proprietăți și aplicații ale unor secvențe speciale de numere întregi	74
5	Ecuatii peste cuaternioni și octonioni	78
5.1	O ecuație pătratică peste cuaternioni reali	78
5.2	Algebre cu diviziune și soluțiile ecuațiilor de gradul al doilea în algebra $\mathbb{H}(\alpha, \beta)$	90
5.3	Codul sursă al algoritmului	93
5.4	Aplicații și exemple numerice	95
6	Concluzii	106
6.1	Cercetări ulterioare	111
	Listă de publicații proprii	111
	REFERINȚE	113

1. Motivație

Am dorit să urmez un doctorat în matematică și consider că este o alegere valoroasă, deoarece, în calitate de doctorand în matematică, am fost implicată în cercetări de ultimă generație și a fost o provocare să aduc idei noi, tehnici și metode la ceea ce este deja cunoscut. Am întâlnit probleme și întrebări complexe și a trebuit să dezvolt propriile metode pentru a le aborda. Pe măsură ce am devenit mai implicată în cercetarea matematică, am dezvoltat, de asemenea, abilitățile mele de comunicare, deoarece a fost necesar să-mi transmit ideile altor cercetători în domeniu. Acest lucru a reprezentat o provocare în timpul prezentărilor proiectelor de cercetare, a rapoartelor, a sesiunilor de comunicare matematică, a conferințelor sau simpozioanelor, precum și în discuțiile cu colegii din domeniul matematicii.

Am ales această specializare ca o continuare a formării mele profesionale, deoarece sunt profesor de matematică la Colegiul Național Pedagogic „Constantin Brătescu” Constanța, am 26 de ani de experiență în domeniul educației.

În timpul formării mele doctorale, am prezentat următoarele lucrări la conferințe indexate ISI:

1) Am participat la a 8-a Conferință Internațională Euro-Asiatică despre Științele Matematice și Aplicații, desfășurată la Baku, Azerbaijan, prezentând lucrarea "Some remarks on difference linear equations of degree n " („Câteva observații privind ecuațiile liniare de diferențe de gradul n ") în perioada 27-30 august 2019, <http://www.iecmsa.org/organize/2019>, <http://www.iecmsa.org/2019/>, publicat în Mathematical Methods in the Applied Sciences, DOI: 10.1002/mma.6257, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/mma.6257>

2) Am participat la Conferința Internațională de la Prishtina, KOSOVO, în 2021, prezentând lucrarea "Equations with quaternions" („Ecuații cu cuaternioni") în perioada 11-12 iunie, <http://fwbcma2021.ilirias.com/>

3) Am participat la cea de-a 10-a Conferință Internațională Euro-Asiatică despre Științele Matematice și Aplicații, desfășurată în Sakarya, Turcia (IECMSA-2021), prezentând lucrarea "Equations with quaternions and octonions" („Ecuații cu cuaternioni și octoni") în perioada 25-27 august 2021. <http://www.iecmsa.org/program/>, <https://us02web.zoom.us/j/2830171452success>

4) Am participat la cea de-a 11-a Conferință Internațională Euro-Asiatică despre Științele Matematice și Aplicații, desfășurată la Istanbul, Turcia (IECMSA-2022), prezentând lucrarea "Quaternions Quadratic Equation" („Ecuație pătratică cu cuaternioni") în perioada 29 august - 1 septembrie 2022. <http://www.iecmsa.org/>
e-mail: conference@iecmsa.org

<http://www.iecmsa.org/program/>

Am participat și la următoarele evenimente științifice:

1) IMCS-55 - A cincea Conferință a Societății Matematice a Republicii Moldova dedicată aniversării a 55 de ani de la înființarea Institutului de Matematică și Informatică "Vladimir Andrunachievici", 28 septembrie - 1 octombrie 2019, Chișinău, unde am prezentat lucrarea: "Some remarks regarding Fibonacci and Lucas numbers" („Câteva observații privind numerele Fibonacci și Lucas”),
<http://www.math.md/imcs55/index.htm>

2) Simpozionul Internațional Probleme Actuale de Matematică și Informatică Tum, Chișinău, Republica Moldova, 27-28 noiembrie 2020, unde am prezentat lucrarea: "Applications of some special number sequences and quaternion elements using Fibonacci and Lucas elements" („Aplicații ale unor serii speciale de numere și elemente quaternionice folosind elemente Fibonacci și Lucas”),
<https://utm.md/wp-content/uploads/2020/11/Programme-SIPAMI-2020.pdf>

3) Sesiunea de Comunicări Matematice, Constanța, 5 decembrie 2020, unde am prezentat lucrarea: "Recurrence relations. Applications in cryptography" („Relații de recurență. Aplicații în criptografie”),
<https://fmi.univ-ovidius.ro/wp-content/uploads/2020/anunturi/main/scm-sectb.pdf>
<https://fmi.univ-ovidius.ro/sesiunea-de-comunicari-matematice-2020/>

4) Sesiunea de Comunicări Matematice, Constanța, 11 decembrie 2021, unde am prezentat lucrarea: "Solving Equations over Quaternions and Octonions" ("Rezolvarea ecuațiilor cuaternionilor și octonionilor"),
<https://fmi.univ-ovidius.ro/sesiunea-de-comunicari-matematice-2021/>

5) Am participat la Conferința Internațională RESTART4EDU: „Oportunități academice de predare și învățare” (ediția I), cu numărul 2020-1-RO01-KA226-HE-095772, finanțată de Programul Erasmus Plus. Conferința a avut loc în Constanța în perioada 27-28 aprilie 2023, unde am prezentat un articol intitulat „The Romanian undergraduate students' perspective on project-based learning” („Perspectiva studenților români asupra învățării bazate pe proiect”). Acest articol a fost publicat în Revista de Psihologie "Black Sea", Vol. 14, Nr. 1, 45-52, Spring, 2023 ISSN: 2068-4649 www.bspsychology.ro,
<https://bspsychology.ro/index.php/BSJoP>

Ca student-doctorand la Universitatea Ovidius din Constanța, am primit o bursă în perioada 1 septembrie 2020 - 31 august 2021, în cadrul proiectului „Excelență academică și valori antreprenoriale - sistem de burse pentru asigurarea oportunităților de formare și dezvoltare a competențelor antreprenoriale ale doctoranzilor și postdoctoranzilor” (ANTREPRENORDOC) ("Academic Excellence and Entrepreneurial Values - a scholarship system for providing opportunities to develop the entrepreneurial skills of PhD and postdoctoral students"), project code POCU/380/6/13/123847/25.05.2019, SMIS code: 123847."

Prin intermediul acestei burse, am obținut următoarele rezultate:

1) Am participat la Conferința Internațională „Global Economy Under Crisis”, organizată de Facultatea de Economie a Universității Ovidius din Constanța, în perioada 10-11 decembrie 2020, unde a fost publicat articolul intitulat ”Mathematics and the Prestige of the School Unit” („Matematica și Prestigiul Unității Școlare”)

<http://stec.univ-ovidius.ro/conferinte-detalii/the-international-conference-global-economy-under-crisis-9th-edition-december-10th-11th-2020>

2) Am participat la cea de-a 37-a Conferință IBIMA desfășurată în perioada 1-2 aprilie 2021 în Cordoba, Spania, unde articolul meu intitulat „Managers Involved In The Development Of Educational Institutions” („Manageri implicați în dezvoltarea instituțiilor educaționale”) a fost publicat în lucrările conferinței (ISBN: 978-0-9998551-6-4, publicat în SUA)

<https://ibima.org/accepted-paper/managers-involved-in-the-development-of-educational-institutions/>

3) Am pregătit Planul de Afaceri pentru înființarea Centrului Educațional ”After School and Before School FIBONACCI”.

4) Am participat la Conferința „European Integration - Realities and Perspectives” (EIRP 2021) („Integrare Europeană - Realități și Perspective”), Galați, România, în perioada 14-15 mai 2021, cu prezentarea intitulată ”Equations in algebras obtained by the Cayley-Dickson process” („Ecuatii în algebre obținute prin procedeul Cayley-Dickson”)

<https://zoom.us/j/91918263281?pwd=dk1MWGxJYUxVYlpwQ1lpYmlHc3gvUT09>

5) Am participat la Conferința „European Integration - Realities and Perspectives” (EIRP 2021) („Integrare Europeană - Realități și Perspective”), Galați, România, în perioada 14-15 mai 2021, cu prezentarea intitulată ”Some solutions of the equation $x^2 + ax + b = 0$ with elements of type quaternion Fibonacci.” („Câteva soluții ale ecuației $x^2 + ax + b = 0$ cu elemente de tip quaternioni Fibonacci.”)

<https://zoom.us/j/91918263281?pwd=dk1MWGxJYUxVYlpwQ1lpYmlHc3gvUT09>

6) Am participat la Conferința Științifică a Școlilor Doctorale SCDS-UDJG, „Perspectives and Challenges in Doctoral Research” („Perspective și Provocări în Cercetarea Doctorală”), Ediția a IX-a, la Universitatea Dunărea de Jos din Galați, în perioada 10-11 iunie 2021, cu o prezentare și un poster intitulate ”Equations with Quaternions” („Ecuatii cu Cuaternioni”).

<http://www.cssd-udjg.ugal.ro/index.php/abstracts-2022>

<http://www.cssd-udjg.ugal.ro/index.php/programme-21>

Ca student-doctorand, am beneficiat de o „Bursă de Excelență pentru Cercetare” în perioada iulie-septembrie 2021, de la Școala Doctorală a Universității Ovidius din Constanța.

Unul dintre aspectele satisfăcătoare ale experienței mele academice a fost oportunitatea de a contribui la cunoștințele existente prin cercetare. Sunt mândră

să fiu autorul mai multor articole publicate care reflectă devotamentul și munca mea susținută. Aceste articole nu doar reprezintă rezultatul a numeroase ore de cercetare și analiză, ci și demonstrează evoluția mea ca cercetător. Ele servesc drept repere semnificative în cariera mea academică:

1) Am colaborat la redactarea unui capitol de carte: Cristina Flaut, Diana Savin, **Geanina Zaharia**, *Some applications of Fibonacci and Lucas numbers*, („Câteva aplicații ale numerelor Fibonacci și Lucas”) în C. Flaut, S. Hoskova-Mayerova, F. Maturo, capitol de carte în cadrul publicație Springer: *Algorithms as a foundation for modern applied Mathematics*, („Algoritmi ca bază pentru matematica aplicată modernă”) Springer, 2020, 119–130

https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-61334-1_5

<https://arxiv.org/abs/1911.06863>

În acest capitol, prezentăm noi aplicații ale numerelor Fibonacci și Lucas. Descoperim structuri algebrice pe anumite mulțimi definite cu aceste numere. Generalizăm conceptul de numere Fibonacci și Lucas prin utilizarea unei relații binare arbitrare peste câmpurile reale, în loc să ne bazăm pe adunarea numerelor reale, și dezvoltăm proprietăți pentru secvențele nou obținute. Mai mult, prin utilizarea relațiilor dintre numerele Fibonacci și Lucas, propunem o metodă de găsim a unor exemple noi de algebre de quaternioni cu diviziune și prezentăm noi proprietăți ale acestor elemente.

2) După participarea la a 8-a „International Eurasian Conference on Mathematical Sciences And Applications” (Conferință Internațională Eurasiatică de Științe Matematice și Aplicații) din Baku, Azerbaijan, unde am prezentat lucrarea intitulată „Some Remarks Regarding Difference Equations of Degree n ” („Câteva Observații cu Privire la Ecuatiile Diferențiale de Gradul n ”), în perioada 27-30 august 2019. Site-ul conferinței poate fi găsit la:

<http://www.iecmsa.org/organize/2019> and <http://www.iecmsa.org/2019/>, a fost publicată lucrarea îmbunătățită în revista *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, autorii fiind Cristina Flaut, Diana Savin, Geanina Zaharia, cu titlul „Properties and applications of some special integer number sequences” („Proprietăți și aplicații ale unor secvențe speciale de numere întregi”), 44(2021), 7442-7454; DOI: 10.1002/mma.6257. Articolul integral poate fi accesat la:

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/mma.6257>.

Articolul a fost premiat în cadrul programului PN-III-P1-1.1-PRECISI-2021-56202, poziția 1140 în lista din zona roșie, în luna septembrie 2021: <https://bit.ly/43Mn61R>

În acest articol, prezentăm caracteristicile și aplicațiile unor secvențe speciale de numere întregi. Extindem și furnizăm mai multe proprietăți ale perioadei Pisano. În plus, oferim o nouă aplicație în domeniul criptografiei și discutăm utilizările elementelor cu quaternioni.

3) În cadrul proiectului ANTREPRENORDOC, am dezvoltat articolul intit-

ulat "Remarks Regarding Computational Aspects in Algebras Obtained by Cayley–Dickson Process and Some of Their Applications" („Considerații cu privire la Aspectele Computaționale în Algebrele Obținute prin Procedul Cayley–Dickson și Unele dintre Aplicațiile Lor”), publicat în revista Mathematics în 2022, volumul 10, paginile 1141. <https://doi.org/10.3390/math10071141>. Cu toate că publicarea a avut loc după încheierea grantului, taxa de publicare a fost acoperită de Școala Doctorală. În articol sunt prezentate mai multe identități și proprietăți noi în algebrele obținute prin procedul Cayley–Dickson. Ca o altă observație privind aspectele computaționale în aceste algebre, în ultima parte a acestui articol, rezolvăm ecuații pătratice în algebra quaternionilor reali când coeficienții sunt elemente speciale. Acești coeficienți speciali ne-au permis să rezolvăm ecuații pătratice interesante, oferind soluții directe fără a fi nevoie de software specializat.

4) În 2023, am depus articolul intitulat "A Method for Solving Quadratic Equations in Real Quaternion Algebra by using Scilab software" („O metodă de rezolvare a ecuațiilor pătratice în algebra quaternionilor reali folosind software-ul Scilab”) acceptat pentru publicare în revista Italian Journal of Pure and Applied Mathematics (IJPAM-2023-76 este numărul de referință al manuscrisului). Articolul a fost de asemenea postat pe arXiv la: <https://arxiv.org/abs/2304.08930>. Articolul prezintă aplicații numerice ale ecuației pătratice cu coeficienți quaternioni, concentrându-se pe algebra quaternionilor reali cu coeficienți parametrizați, denumită $\mathbb{H}(\alpha, \beta)$. Valorile specifice ale lui α și β determină proprietățile și structura algebrei de quaternioni. Este introdus un nou algoritm numeric pentru rezolvarea ecuației $x^2 + ax + b = 0$ în algebra $\mathbb{H}(\alpha, \beta)$. Algoritmul este dezvoltat pe baza metodelor bine-cunoscute de rezolvare și utilizează software-ul Scilab pentru calcul numeric. Sunt evidențiate avantajele utilizării Scilab pentru rezolvarea ecuațiilor cu quaternioni. Articolul introduce un nou algoritm numeric pentru rezolvarea ecuațiilor pătratice cu coeficienți quaternioni în algebra $\mathbb{H}(\alpha, \beta)$.

2. Starea actuală a cercetărilor în domeniul numerelor Fibonacci și criptografiei

În ultima perioadă, în mai multe lucrări, au fost prezentate noi proprietăți și aplicații ale unor secvențe de numere întregi, în special în domeniul Criptografiei și Teoriei Codurilor, cum ar fi secvențele Fibonacci, secvențele Lucas, secvențele Pell, secvențele p –Fibonacci, secvențele Tribonacci, etc. (vezi [Fl; 19], [HKN; 12], [Ko, Oz, Si; 17], [Me; 99], [Re; 13], [St; 06], [St; 07], etc.) Am studiat literatura de specialitate pentru a observa în ce direcții au mers cercetătorii și pentru a identifica noi orizonturi pe care le pot explora. Utilizând aceste lucrări, prezentăm rezultatele noastre proprii: mai multe aplicații ale secvențelor speciale de numere întregi în subsecțiunea 3.1. Extindem conceptul de numere Fibonacci prin utilizarea înmulțirii arbitrare în cadrul câmpurilor numerelor reale, în loc

de adunarea numerelor reale, și furnizăm proprietăți ale secvențelor derivate prin această abordare. Rezultatele noastre proprii sunt prezentate în subsecțiunea 4.1. În plus, generalizăm și furnizăm câteva proprietăți ale perioadei Pisano; rezultatele noastre proprii sunt prezentate în subsecțiunea 3.3. Mai mult, oferim două aplicații în criptografie; rezultatele noastre proprii sunt prezentate în subsecțiunea 3.4

Sir W. R. Hamilton a fost un matematician și fizician irlandez care a adus contribuții semnificative în domeniul matematicii, în special în algebră și geometrie. La jumătatea secolului al XIX-lea, el a investigat conceptul de quaternioni, care sunt un tip de numere complexe extinse, având patru componente reale. Munca lui Hamilton asupra quaternionilor l-a condus să descopere și quaternionii complecși. Aproximativ un secol după descoperirea lui Hamilton, A. F. Horadam a introdus conceptul de numere complexe Fibonacci și quaternioni Fibonacci. Aceste dezvoltări au inspirat mulți cercetători să aducă contribuții ulterioare în domeniul matematicii.

Într-o publicație din 2008 ([Cr, Hr; 08]), autorii evidențiază rolul crucial jucat de Raportul de Aur în fizica modernă, în special în fizica atomică, și în teoria probabilităților, cu conexiunea sa la numerele Fibonacci. Articolul explorează semnificația proporției de Aur în geometrie și aplicațiile sale în diverse domenii, inclusiv în natură, muzică, artă și fizică. De asemenea, prezintă o versiune complexă a Raportului de Aur și studiază proprietățile acestuia. Stabilește conexiuni între structurile numărului de aur și metricile Riemanniene, un obiect geometric crucial în studiu.

Am cercetat acest material pentru propriul meu rezultat (Remarca 4.1.7.) din subsecțiunea 4.1.

Într-o publicație din 2013 ([Fl, Sh; 13]), autorii au investigat proprietățile quaternionilor Fibonacci generalizați și quaternionilor Fibonacci-Narayana. Acești quaternioni sunt extensii ale secvențelor standard Fibonacci și Narayana și au fost studiați pentru potențialele lor aplicații în diverse domenii, cum ar fi matematica, informatica și ingineria. Autorii au prezentat o analiză detaliată a caracteristicilor acestor quaternioni generalizați, inclusiv definițiile lor, relațiile cu alte concepte matematice și modurile în care pot fi manipulate și utilizate. Această cercetare oferă perspective valoroase asupra proprietăților și utilizărilor potențiale ale quaternionilor Fibonacci generalizați și quaternionilor Fibonacci-Narayana.

Într-o serie de publicații, autorii au studiat pe larg quaternionii Fibonacci generalizați, quaternionii Fibonacci-Narayana și quaternionii Fibonacci complecși. Multe dintre aceste rezultate sunt prezentate în subsecțiunile 2.5. și 2.6.

Într-o publicație din 2016 ([ET, SY, MS; 16]), autorii au introdus con-

ceptul de quaternioni Lucas bi-periodici, care generalizează quaternionii Lucas standard. Ei au furnizat funcția generată și formula Binet pentru acești quaternioni, stabilind relația dintre quaternionii Fibonacci bi-periodici și quaternionii Lucas bi-periodici. Multe dintre aceste rezultate sunt prezentate în subsecțiunile 2.7., 4.1. și 4.2.

Într-o publicație din 2019 ([FSZ; 19]), autorii prezintă diverse aplicații ale numerelor Fibonacci și Lucas în structuri algebrice și algebre cu quaternioni. Ei explorează structuri algebrice definite folosind numerele Lucas și Fibonacci prin utilizarea unei relații binare arbitrare peste câmpul real în locul operației tradiționale de adunare. Aceast material aduce la lumină proprietăți și relații ale noilor secvențe generate ca rezultat al acestei generalizări. Numerele Fibonacci și Lucas sunt folosite pentru a găsi exemple noi de algebre cu quaternioni și pentru a prezenta proprietăți noi ale acestor elemente matematice. Sunt oferite noi aplicații ale acestor secvențe prin studierea structurilor algebrice și a relațiilor. Se prezintă informații preliminare noi despre numerele Fibonacci și Lucas, inclusiv definițiile și proprietățile lor de bază. Sunt menționate formule cunoscute, cum ar fi formula lui Binet pentru secvențele Fibonacci și Lucas. Sunt descrise proprietățile numerelor Fibonacci-Lucas generalizate, ale algebrelor cu quaternioni și ale diverselor ecuații algebrice care implică numere Fibonacci și Lucas. Autorii furnizează demonstrații și explicații pentru fiecare rezultat. Se menționează posibilitatea aplicării unor abordări similare la secvențe de tip Fibonacci, și se introduce o ecuație de diferență de gradul doi. Autorii evidențiază, de asemenea, conexiunea dintre secvența Fibonacci și raportul de aur. Sunt explorate noi aplicații ale numerelor Fibonacci și Lucas în structuri algebrice și algebre quaternionice, furnizând înțelegerea proprietăților și relațiilor acestor numere și prezentând rezultate noi în domeniu, în subsecțiunile 2.7. și 4.1.

Într-o publicație din 2020 ([FLSZ; 20]), autorii au prezentat o aplicație în criptografie care utilizează relații de recurență asemănătoare cu secvența Fibonacci. De asemenea, au introdus o nouă perspectivă asupra perioadei Pisano și a proprietăților sale. În explorarea algebrelor derivate din procedeul Cayley-Dickson, determinarea dacă o algebra este cu diviziune sau nu are o importanță semnificativă. Mai mult, dacă o algebră este cu diviziune, este interesant să vedem dacă putem găsi substructuri care posedă anumite proprietăți importante pentru diverse aplicații, cum ar fi criptografia, teoria codurilor, etc.

Rezultatele proprii din această publicație pot fi identificate în subsecțiunile 2.1., 3.1., 3.2., 3.3., 4.2.

Într-o publicație din 2022 ([FZ; 22]) care explorează algebrele cu diviziune prin procedeul Cayley-Dickson, întâmpină provocări în obținerea proprietăților dorite din cauza complexităților computaționale. Prin urmare, descoperirea de identități în aceste algebre devine semnificativă, ajutând la dobândirea de noi

proprietăți și facilitând calculul. În acest sens, studiul introduce mai multe identități și proprietăți noi în algebrele derivate prin procedeul Cayley-Dickson. În plus, atunci când anumite elemente servesc drept coeficienți, ecuațiile pătratice în algebra cuaternioni reală cu diviziune pot fi rezolvate, demonstrând capacitatea autorilor de a oferi soluții directe fără a depinde de software specializat.

Rezultatele proprii din acest articol pot fi găsite în subsecțiunile 2.9., 3.4. și 5.1..

În 2023, în ([ZM; 23]), autorii abordează o metodă inovatoare pentru rezolvarea ecuațiilor pătratice în algebra reală cu quaternioni. Metoda prezentată în articol se concentrează pe identificarea soluțiilor la ecuațiile pătratice în algebra reală de quaternioni cu diviziune. Autorii dezvoltă un algoritm specific pentru obținerea soluțiilor într-un mod precis și eficient, folosind software-ul Scilab, care oferă o abordare practică și aplicată pentru rezolvarea acestor ecuații cu quaternioni.

Sunt furnizate exemple concrete pentru a ilustra aplicarea practică a algoritmului propus.

Articolul subliniază importanța utilizării software-ului Scilab în rezolvarea ecuațiilor pătratice în domeniul algebrei reale cu quaternioni. Sunt evidențiate avantajele acestei metode și contribuția valoroasă la cercetarea în matematică aplicată. În plus, autorii sugerează posibile extinderi și progrese pentru metoda propusă deschizând calea pentru investigații și aplicații noi în domeniul algebrei cu quaternioni. Articolul aduce o contribuție semnificativă în domeniul matematicii aplicate, oferind cercetătorilor și studenților interesați de algebra cu quaternioni, o metodă eficientă și practică pentru rezolvarea ecuațiilor pătratice.

Rezultatele proprii din acest articol pot fi găsite în subsecțiunile 5.2., 5.3. și 5.4..

3. Work structure

În primul rând, dorim să subliniem faptul că rezultatele noi și originale ale acestei teze sunt obținute din următoarele articole sau capitole de carte proprii: [FSZ; 19], [FLSZ; 20], [FZ; 22], [ZM; 23].

Rezultatele proprii și cele ale colaborărilor mele pot fi găsite în această teză în Subsecțiunea 3.1 (Propoziția 3.1.1, Propoziția 3.1.2, Remarca 3.1.3), Subsecțiunea 3.2 (Propoziția 3.2.1, de la Definiția 3.2.3 la Exemplul 3.2.7, inclusiv), toată Subsecțiunea 3.3.1, propriul meu Exemplu 3.3.6, Subsecțiunea 3.4 (de la Propoziția 3.4.2 la Remarca 3.4.7, inclusiv), întreaga Subsecțiune 4.1 (de la Exemplul 4.1.1 la Remarca 4.1.9, inclusiv), Subsecțiunea 4.2 (de la Propoziția 4.2.4 la Propoziția 4.2.12, inclusiv), Subsecțiunea 5.1 (de la Remarca 5.1.2 la Propoziția 5.1.10, inclusiv), întreaga Subsecțiune 5.2 (de la Propoziția 5.2.1 la Corolarul

5.2.4, inclusiv), Subsecțiunea 5.3 (Codul sursă al algoritmului), Subsecțiunea 5.4 (toate exemplele de la 5.4.1 la 5.4.11, inclusiv).

Teza mea de doctorat este structurată în șase capitole. În primul capitol, am prezentat motivația care m-a condus să urmez acest doctorat în matematică și am împărtășit experiențele valoroase pe care le-am dobândit în calitate de student-doctorand. Am furnizat o listă a conferințelor și evenimentelor științifice la care am participat activ și am prezentat lucrări legate de cercetarea mea. Am oferit o istorie a studiului subiectului, articole pe care le-am studiat pentru a mă familiariza cu proprietățile, relațiile și aplicațiile acestor ecuații liniare cu diferențe.

În al doilea capitol, intitulat *Preliminarii*, explorăm conceptele și proprietățile esențiale necesare pentru rezultatele noastre ulterioare. Definim ecuația caracteristică și stabilim relațiile de recurență pentru diverse șiruri, inclusiv numerele Fibonacci, Pell, Lucas și Fibonacci-Narayana. În plus, prezentăm identități importante precum identitatea Cassini, identitatea Catalan și identitatea Vajda. Acest capitol contribuie la înțelegerea algebrilor generate de procedeul Cayley-Dickson și evidențiază aspectele lor computaționale, oferind perspective asupra proprietăților și aplicațiilor lor.

Capitolul 3, intitulat *Șiruri Speciale de Numere Întregi și Unele dintre Aplicațiile Lor*, oferă o explorare detaliată a șirurilor speciale de numere întregi, a aplicațiilor lor în teoria codurilor și criptografie, conceptul de perioadă Pisano, procesele de criptare și decriptare folosind ecuații cu diferențe, și studiul algebrilor obținute prin procedeul Cayley-Dickson.

În secțiunea 3.1., se regăsesc trei rezultate distincte și originale:

1) În Propoziția 3.1.1, prezint trei relații între matricea asociată șirului de recurență D_k și matricea Y_i . Y_i este formată dintr-un singur rând și k coloane, generate de termenii d_i ai aceluiași șir de recurență.

2) În Propoziția 3.1.2, folosind aceleași notații, pentru relația de recurență de grad n , am identificat trei relații adevărate.

3) În Remarca 3.1.3, arăt că relația ii) este o extensie a identității Cassini, și în relația iii), obținem relații pentru numerele Fibonacci alegând $k = 2$ și $a_1 = 1$, respectiv $k = 3$.

În Secțiunea 3.2, avem următoarele rezultate proprii:

1) În Propoziția 3.2.1, am indicat că șirul generat de d_n atunci când este luat modulo m este periodic, și am furnizat și dovada acestei propoziții.

2) În Definiția 3.2.3, am introdus $\pi(m)$, denumită perioada Pisano, pentru șirul (d_m) . Aceasta reprezintă frecvența cu care șirul (d_n) se repetă modulo m .

3) Remarca 3.2.4 se referă la proprietățile matricei D_k , asociată ecuației cu diferențe din (3.1.1), și cum aceasta este legată de perioada Pisano a șirului (d_n) modulo m .

Matricea D_k este o matrice specifică asociată ecuației cu diferențe (3.1.1). $\pi(m)$ reprezintă perioada Pisano a șirului (d_n) atunci când este luat modulo m .

I_k reprezintă matricea identitate de ordin k . Prima ecuație, $D_k^{\pi(m)} \equiv I_k \pmod{m}$, arată că matricea D_k ridicată la puterea $\pi(m)$ este egală cu matricea identitate I_k modulo m . A doua ecuație, $((-1)^{(k+1)} a_k)^{\pi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, indică faptul că expresia $((-1)^{(k+1)} a_k)^{\pi(m)}$ este congruentă cu 1 modulo m . Ultimele două ecuații, $\text{ord}\left((-1)^{(k+1)} a_k\right) \mid \pi(m)$, arată că ordinul $(-1)^{(k+1)} a_k$ (adică, cea mai mică putere pozitivă pentru care $(-1)^{(k+1)} a_k$ devine congruentă cu 1 modulo m) trebuie să fie un divizor al $\pi(m)$. Acest lucru înseamnă că perioada Pisano $\pi(m)$ este strâns legată de proprietățile lui $(-1)^{(k+1)} a_k$ modulo m .

4) Teorema 3.2.5 abordează mai multe proprietăți ale perioadei Pisano ($\pi(m)$) în contextul secvențelor generate de ecuații de recurență. Această teoremă arată cum se comportă perioada Pisano în diferite situații, oferind observații valoroase în privința repetiției valorilor în secvențele generate de ecuații de recurență:

i) Dacă un număr întreg s_1 este divizibil de un alt număr întreg s_2 , atunci perioada Pisano pentru s_1 ($\pi(s_1)$) trebuie să fie un divizor al perioadei Pisano pentru s_2 ($\pi(s_2)$). Cu alte cuvinte, dacă o secvență are o perioadă mai scurtă atunci când lucrăm cu un anumit modulo, atunci aceeași secvență va avea o perioadă mai lungă atunci când lucrăm cu un multiplu al acelui modulo.

ii) Perioada Pisano pentru cel mai mic multiplu comun al două numere, s_1 și s_2 , este egală cu cel mai mic multiplu comun al perioadelor lor individuale ($\pi(s_1)$ și $\pi(s_2)$).

iii) Pentru numere prime ridicate la o putere (p^r), perioada Pisano pentru p^{r+1} este fie egală cu perioada Pisano pentru p^r , fie este p ori perioada Pisano pentru p^r . Acest lucru depinde de proprietățile matricei asociate ecuației de recurență.

iv) Dacă perioada Pisano pentru p^r este diferită de perioada Pisano pentru p^{r+1} , atunci perioada Pisano pentru p^{r+1} este, de asemenea, diferită de perioada Pisano pentru p^{r+2} . Acest lucru sugerează că perioadele Pisano pentru puterile consecutive ale aceluiași număr prim sunt legate într-un mod specific.

v) Dacă matricea asociată ecuației de recurență este diagonalizabilă, iar numărul prim p nu divide un anumit coeficient specific al ecuației, atunci perioada Pisano pentru p trebuie să fie un divizor al lui $p - 1$. Această proprietate este legată de proprietățile matricei asociate.

vi) Dacă avem o secvență generată de o ecuație de recurență cu condiții inițiale specifice, iar toți coeficienții ecuației sunt numere impare, atunci perioada Pisano pentru modulul 2 ($\pi(2)$) este egală cu $k + 1$, unde k este ordinul ecuației de recurență.

5) Exemplul 3.2.7. abordează diverse situații legate de calculul perioadei Pisano ($\pi(m)$) în contextul ecuațiilor de recurență. Acest exemplu ilustrează modul în care perioada Pisano este calculată în diferite cazuri și cum depinde de

coeficienții ecuațiilor de recurență, precum și de numărul prim p .

i) Se ia în considerare ecuația de recurență cu $k = 3$ și coeficienți impari a_1, a_2, a_3 . Se calculează perioada Pisano pentru această ecuație modulo 2, arătând că $\pi(2) = k + 1 = 4$.

ii) Se remarcă că pentru coeficienții pari a_i , calculul lui $\pi(2)$ devine mai complicat și depinde de numărul și poziția coeficienților pari. Se oferă un exemplu cu $k = 3$, unde a_1 și a_3 sunt impari, iar a_2 este par. În această situație, $\pi(2) = 7$.

iii) Se ia un exemplu cu coeficienți și $p = 3$. Valoarea lui $\pi(3)$ este calculată și arătată a fi 6. Apoi, se realizează calculul lui $\pi(9)$, obținându-se, de asemenea, o valoare de 6. Utilizând Teorema 3.2.5, iii), se concluzionează că $\pi(27) = 18$.

iv) Calculele sunt efectuate în $\mathbb{Z}_5$, unde $p = 5$. Sunt luați în considerare coeficienții $a_1 = 6$, $a_2 = -11$, și $a_3 = 6$. Valoarea lui $\pi(5)$ este calculată și arătată a fi 4.

În Secțiunea 3.3.1 intitulată "CryptoMatrix", prezint un rezultat original:

1) Aplicarea ecuațiilor de recurență în criptografie implică codificarea mesajelor text folosind matrice derivate dintr-o secvență specifică. Cheia de criptare este generată pe baza proprietăților legate de secvență, permitând criptarea sigură a mesajelor. Procesul de decriptare folosește aceeași cheie, făcându-l eficient și sigur, cu perioada Pisano jucând un rol semnificativ în variația cheii pentru o securitate sporită.

2) Exemplul 3.3.1. este un rezultat original în care aplic ecuații de recurență în criptografie. Introduc o metodă de criptare bazată pe matrice generate dintr-o secvență specifică, folosind cheia de criptare $(3, 2, 1, 1, 1, 3)$. Operațiile matrice sunt detaliate pentru criptare, care convertește textul simplu "ABBAAB" în textul criptat "BBAABB." Exemplul evidențiază, de asemenea, rolul perioadei Pisano în variația cheii pentru o securitate sporită și descrie procesul de decriptare folosind aceeași cheie.

3) Exemplul 3.3.2. este un rezultat original care demonstrează aplicarea ecuațiilor de recurență în criptografie. Folosește o matrice specifică generată dintr-o secvență dată și o cheie de criptare $(3, 27, 4, -5, 2, 2)$. Textul simplu "SUCCESS * *" este transformat în textul criptat "HDSBSCKVS". Acest exemplu evidențiază complexitatea metodei, unde aceleași litere pot fi criptate în caractere distincte, iar caractere diferite pot fi codate ca aceeași literă, făcând texte criptate dificile de descifrat. Procesul de decriptare folosește aceeași cheie ca și criptarea, iar perioada Pisano (18) joacă un rol semnificativ în determinarea cheii pentru securitatea datelor.

4) Remarca 3.3.3. subliniază că criptosistemul prezentat în această secțiune este de tip simetric, folosind aceeași cheie pentru criptare și decriptare. Pentru a aborda problema securității transmiterii cheii, se sugerează utilizarea de criptosisteme hibride, care combină metode simetrice și asimetrice, sau criptarea cheilor simetrice cu chei de criptare speciale, distribuite printr-un algoritm complex.

În Secțiunea 3.3.2. intitulată "CryptoKeyLock", prezintă un rezultat original: Exemplul 3.3.6 introduce un concept numit "secvență completă" și prezintă o metodă pentru criptarea și decriptarea mesajelor bazată pe această secvență completă. Pentru a face acest lucru, este utilizată Definiția 3.3.4, în care "g-complet" este definit, iar Teorema 3.3.5 este, de asemenea, folosită, afirmând că secvența de numere întregi pozitive $(d_m)_{m \geq 0}$ generată de ecuația de recurență dată în exemplu este g-completă.

Exemplul 3.3.6 ilustrează această teorie în contextul criptării și decriptării. În acest exemplu, este folosit un alfabet cu 27 de litere (A, B, C, ..., Z, x), unde "x" reprezintă un spațiu liber. Mesajul "MATHxISxBEAUTIFUL" este criptat. Mesajul este împărțit în blocuri de lungime egală: MATH/xISx/BEAU/TIFU/Lxxx. Coeficienții pentru ecuația diferențială sunt aleși pentru a genera o secvență completă, rezultând o cheie de criptare. Fiecare bloc este apoi transformat într-un șir de litere criptate folosind această cheie.

Generarea fiecărui bloc criptat urmează acești pași:

- Coeficienții pentru ecuația de diferențe sunt aleși, iar termenii $d_k, d_{k+1}, \dots, d_q$ sunt calculați pentru numărul asociat blocului folosind teorema prezentată.
- Se derivă o cheie de criptare, care conține coeficienții ecuației de diferențe și lungimea blocului criptat.
- Pentru fiecare bloc, coeficienții $c_{iq}, c_{i(q-1)}, \dots, c_{i(k-1)}$ sunt calculați conform ecuației prezentate.
- Șirul criptat este obținut pe baza valorilor coeficienților. Dacă un coeficient este mai mare decât 27 (numărul de litere din alfabet plus spațiul liber), este convertit într-un caracter special în textul criptat.
- Pentru decriptare, cheia corespunzătoare decriptării pentru fiecare bloc este folosită pentru a obține blocurile originale.

Exemplul oferă calcule detaliate pentru blocurile mesajului criptat și procesul de decriptare, demonstrând funcționarea metodei de criptare și decriptare bazată pe secvențe complete.

În Secțiunea 3.4, avem următoarele rezultate originale:

1) În Propoziția 3.4.2, sunt stabilite mai multe identități și relații pentru algebrele $\mathcal{A}_t$ obținute prin procedeul Cayley-Dickson. Acestea sunt valabile pentru toate algebrele $\mathcal{A}_t$ obținute prin acest procedeu, indiferent de caracteristica corpului $\mathbb{K}$. Demonstrația acestor identități se bazează pe metoda de liniarizare prezentată în referința [BH; 01]. Această metodă exprimă relațiile date sub forma unei expresii liniare, luând în considerare transformările specifice ale elementelor din aceste algebre.

2) Observația 3.4.3 explică faptul că rezultatele menționate sunt valabile pentru câmpuri de caracteristici arbitrare, inclusiv atunci când $\text{char}\mathbb{K} \neq 2$. Cu toate acestea, când $\text{char}\mathbb{K} \neq 2$, demonstrația relației (3.4.2) devine mai simplă.

3) În Propoziția 3.4.4 s-a stabilit că în toate algebrele $\mathcal{A}_t$ obținute prin procedeul Cayley-Dickson, următoarea identitate este valabilă:

$$(x^m, y, x^n) = 0; m, n \in \mathbb{N};$$

Demonstrarea acestui rezultat se bazează pe proprietățile algebrice ale algebrelor $\mathcal{A}_t$.

4) În Propoziția 3.4.5, s-a afirmat că dacă avem o algebră $\mathcal{A}_t$ obținută prin procedeul Cayley-Dickson și elementele x și y satisfac ecuația următoare: $(x\bar{y} + y\bar{x})^2 = \gamma^2 \mathbf{n}(x) \mathbf{n}(y)$, $\gamma \in \mathbb{K} - \{0\}$.

Atunci, algebra generată de x și y , notată ca $\langle x, y \rangle$, are dimensiunea 1. Această afirmație a fost demonstrată folosind proprietățile elementelor din algebra $\mathcal{A}_t$.

5) În Propoziția 3.4.6, a fost demonstrat următorul aspect: (1) Dacă avem un element a în algebra $\mathcal{A}_t$, și $a \in \mathcal{A}_t - \mathbb{K}$, atunci soluțiile în $\mathcal{A}_t$ ale ecuației $x^2 = a$ sunt soluțiile în K ale următorului sistem:

$$\begin{cases} 2x_0^2 - \mathbf{n}(x) = a_0 \\ 2x_0x_i = a_i, i \in \{1, 2, \dots, 2^t - 1\} \end{cases} ,$$

$$\text{unde } a = \sum_{i=0}^{2^t-1} a_i f_i, x = \sum_{i=0}^{2^t-1} x_i f_i, a_i, x_i \in K.$$

(2) Dacă $a \in \mathbb{K}$, atunci soluțiile în $\mathcal{A}_t$ ale ecuației $x^2 = a$ sunt soluțiile în $\mathbb{K}$ ale următorului sistem:

$$\begin{cases} 2x_0^2 - \mathbf{n}(x) = a \\ 2x_0x_i = 0, i \in \{1, 2, \dots, 2^t - 1\} \end{cases} .$$

6) Remark 3.4.7 explică faptul că dacă avem un element a în algebra $\mathcal{A}_t$, acesta poate fi scris ca $a = a_0 + \vec{a}$, $a_0 \in \mathbb{K}$. Prin urmare, toate elementele b din $\mathcal{A}_t$ de forma $b = \tau + \theta \vec{a}$, $\tau, \theta \in \mathbb{K}$, comută cu a .

În Capitolul 4, intitulat *Unele aplicații ale elementelor speciale definite peste algebre de cuaternioni*, am studiat proprietățile secvențelor Fibonacci și Lucas, concentrându-mă pe numerele Fibonacci și relațiile acestora. Am explorat proprietățile și aplicațiile acestor secvențe speciale de numere întregi, cu accent special pe algebra de cuaternioni. Am analizat relațiile de recurență, formulele Binet, proprietățile modulo, inelele și modulele generate de aceste numere. Am prezentat diverse proprietăți ale acestor secvențe speciale de numere întregi.

În Secțiunea 4.1, prezint următoarele rezultate originale:

1) Exemplul 4.1.1: Acesta prezintă exemple specifice ale numerelor Fibonacci, inclusiv f_{10} , f_{15} și f_{20} , și observă că acestea sunt legate de alte numere Fibonacci mai mici.

2) Propoziția 4.1.2: Stabilește că mulțimea A , definită ca toate numerele de forma αf_{5n} , unde α și n sunt numere întregi, formează un ideal în inelul numerelor întregi.

3) Propoziția 4.1.3: Aceasta se referă la numerele Fibonacci-Lucas generalizate și afirmă că o anumită mulțime care conține aceste numere este, de asemenea, un ideal în inelul numerelor întregi.

4) Propoziția 4.1.4: Aceasta afirmă proprietățile anumitor algebre de cuaternioni (algebre bazate pe unitatea imaginară la quaternioni) legate de numerele Fibonacci și Lucas, cum ar fi faptul că aceste algebre sunt descompuse peste numerele raționale.

5) Propoziția 4.1.5: Aceasta prezintă secvențe Fibonacci definite prin diferite relații, folosind o relație binară $*$ în loc de adunare. Furnizează o formulă pentru calculul elementelor acestor secvențe și menționează o limită bazată pe rădăcinile ecuației asociate relației $*$.

6) Propoziția 4.1.6: Această propoziție prezintă proprietăți ale unor algebre de quaternioni specifice (algebre bazate pe unitatea imaginară cu quaternioni) legate de numerele Fibonacci și Lucas, cum ar fi faptul că aceste algebre sunt algebre despărțite peste numerele raționale.

7) Remark 4.1.7: Acesta adaugă clarificări și observații suplimentare la Propoziția 4.1.6.

8) Propoziția 4.1.8: Această propoziție abordează proprietățile numerelor Fibonacci-Lucas generalizate și afirmă că un anumit set care conține aceste numere este, de asemenea, un ideal în inelul numerelor întregi.

9) Observația 4.1.9: Aceasta adaugă clarificări și observații suplimentare la Propoziția 4.1.8

În secțiunea 4.2., prezint următoarele rezultate originale:

1) Propoziția 4.2.4: Au fost stabilite următoarele relații: i) Dacă l este un număr prim, atunci l divide a_n doar atunci când n este un număr par. ii) $a_n \equiv 1 \pmod{l^2}$ dacă și numai dacă n este un număr impar.

2) Propoziția 4.2.5: S-a dovedit că mulțimea $M = \alpha a_{2n} | n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}$ formează un inel comutativ neunitar cu operațiile de adunare și înmulțire.

3) Propoziția 4.2.6: S-a demonstrat că mulțimea M servește ca un ideal bilateral în cadrul inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, în mod specific, $M = l\mathbb{Z}$.

4) Propoziția 4.2.7: S-a stabilit că toate numerele l-quaternion sunt inversabile în algebra quaternion $\mathbb{H}\mathbb{Z}l(-1, -1)$.

5) Propoziția 4.2.8: S-a arătat că toate numerele l-quaternion sunt inversabile în algebra quaternion $\mathbb{H}\mathbb{Z}l^r(-1, -1)$.

6) Propoziția 4.2.9: A fost prezentată o nouă relație: $a_n + a_{n+3 \cdot 2^k} = M_k(M_k^2 - 3)a_{n+3 \cdot 2^{k-1}}$, pentru $k \geq 2$.

7) Propoziția 4.2.10: S-a demonstrat că l-cuaternionii satisfac relațiile $A_n = A_{n+2}$.

8) Propoziția 4.2.11: S-a demonstrat inversabilitatea "l-cuaternionilor" în algebrele cuaternionice.

9) Propoziția 4.2.12.: Au fost cercetate proprietățile "l-cuaternionilor" în inele și module cuaternioni, inclusiv relații specifice între acestea.

În Capitolul 5 intitulat *Ecuatii peste cuaternioni și octonioni*, vom prezenta formule specifice pentru rezolvarea ecuației pătratice $x^2 + bx + c = 0$, cu $b, c \in \mathbb{H}(-1, -1)$, în diferite cazuri. Am oferit exemple specifice de ecuații pătratice și soluțiile acestora în contextul algebrelor de cuaternioni Fibonacci. Am discutat despre algebrele cu diviziune și soluțiile ecuațiilor de gradul al doilea în algebra $\mathbb{H}(\alpha, \beta)$. Se explică faptul că algebra $\mathbb{H}(\alpha, \beta)$ este o construcție matematică a căror proprietăți depind de valorile alese pentru α și β . Am furnizat calcule pas cu pas și formule pentru obținerea soluțiilor ecuațiilor pătratice.

În Secțiunea 5.1, prezint următoarele rezultate originale:

1) Remarca 5.1.2:

-Am investigat dacă Δ este zero sau nu.

-Am luat în considerare un caz particular cu $m=n=3$.

-Dacă folosim doi cuaternioni, intrăm în subcazurile 3 și 4 ale Propoziției 5.1.1. Pentru a obține soluțiile, trebuie să găsim rădăcinile polinomului cubic.

2) Propoziția 5.1.3: Am prezentat soluțiile ecuației (5.1.11).

3) Propoziția 5.1.4: Am prezentat soluțiile ecuației (5.1.12).

4) Propoziția 5.1.5: Am prezentat soluțiile ecuației (5.1.13).

5) Propoziția 5.1.6: Am prezentat soluțiile ecuației (5.1.19).

În Secțiunea 5.2, prezint următoarele rezultate proprii:

1) Propoziția 5.2.1: Prezint soluția ecuației monice $x^2 + bx + c = 0$ în contextul algebrei $\mathbb{H}(\alpha, \beta)$, unde b și c sunt doi cuaternioni din această algebră. Acest lucru permite și determinarea valorilor cuaternionilor x_1, x_2, x_3, x_4 .

2) Corolarele 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4: Acestea sunt afirmații derivate din Teorema 5.1.1.

În secțiunile 5.3 și 5.4, prezentăm rezultatele noastre proprii și includem un algoritm pentru implementarea calculelor și aplicații numerice, împreună cu exemple pentru a ilustra utilizarea practică a formularelor și algoritmului. Oferim mai multe exemple specifice, ilustrând calculele și soluțiile pentru diverse ecuații pătratice în algebra $\mathbb{H}(\alpha, \beta)$.

Capitolul 6 constă în *Concluzii*, urmat de *Cercetări ulterioare*, *Listă de publicații proprii* și *65 Referințe*.

Rezultatele noi și originale prezentate de mine în această teză de doctorat au fost publicate în următoarele articole sau capitole de carte: [FSZ; 19], [FLSZ; 20], [FZ; 22], [ZM; 23].

4. Acknowledgements

Această lucrare este parțial susținută de proiectul ANTREPRENORDOC, în cadrul Programului Operațional de Dezvoltare a Resurselor Umane 2014-2020, finanțat din Fondul Social European, sub numărul de contract 36355/23.05.2019 HRD OP /380/6/13 – Cod SMIS: 123847.

5. Listă de publicații proprii:

1) Cristina Flaut, Diana Savin, **Geanina Zaharia**, „Properties and applications of some special integer number sequences” („Proprietăți și aplicații ale unor secvențe speciale de numere întregi”), Mathematical Methods in the Applied Sciences, 44(2021), 7442-7454;

DOI:10.1002/mma.6257,

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/mma.6257>

<https://arxiv.org/pdf/2001.03963.pdf>, Zona Roșie

2) Cristina Flaut and **Geanina Zaharia** ”Remarks Regarding Computational Aspects in Algebras Obtained by Cayley–Dickson Process and Some of Their Applications” („Observații privind aspectele computaționale în algebrele obținute prin procedeul Cayley–Dickson și unele dintre aplicațiile lor”), Mathematics 2022, 10 (7), 1141.

<https://doi.org/10.3390/math10071141>

<https://www.mdpi.com/2227-7390/10/7/1141>

3) Cristina Flaut, Diana Savin and **Geanina Zaharia** ”Some Applications of Fibonacci and Lucas Numbers” („Unele aplicații ale numerelor Fibonacci și Lucas”), capitol Springer: Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics, ISSN 1434-9922 ISSN 1860-0808 (electronic) Studies in Fuzziness and Soft Computing ISBN 978-3-030-61333-4 ISBN 978-3-030-61334-1 (eBook) <https://doi.org/10.1007/978-3-030-61334-1>

<https://arxiv.org/abs/1911.06863>

4) **Geanina Zaharia** and Diana Munteanu ”A Method for Solving quadratic Equations in Real Quaternion Algebra by using Scilab software” („Metodă pentru rezolvarea ecuațiilor pătratice în algebra quaternionilor reale folosind software-ul Scilab”) articol acceptat la revista Italian Journal of Pure and Applied Mathematics (IJPAM-2023-76 este numărul de referință al manuscrisului) pentru publicare. Articolul a fost de asemenea postat pe arXiv:

<https://arxiv.org/abs/2304.08930>

6. REFERINTE:

- 1.[A; 80] Atkinson, A.C., *Tests of pseudo-random numbers*, Applied Statistics, 29(1980), 164-171.
- 2.[AW; 97] Agarwal, R.P., Wong, P.J.Y., *Advanced Topics in Difference Equations*, Springer Netherlands, 1997, 510 p.
- 3.[B; 61] Brown, Jr.J.L., *Note on Complete Sequences of Integers*, The American Mathematical Monthly, 68(6)(1961), 557-560.
- 4.[BH; 01] Bremner, M., Hentzel, I. *Identities for Algebras Obtained from the Cayley-Dickson Process. Commun. Algebra*, 2001, 29, 3523-3534.
- 5.[CH; 98] Cho, E., *De-Moivre's formula for quaternions*, Appl. Math. Fiet., 11 (6) (1998), 33-35.
- 6.[Ch; 20] Chapman, A., *Factoring Octonion Polynomials. Int. Algebra Comput.*, 2020, 30, 1457-1463.
- 7.[Ch; 20(1)] Chapman, A. *Polynomial Equations over Octonion Algebras. J. Algebra Appl.* 2020, 19, 2050102.
- 8.[Cr, Hr; 08] Crasmareanu, M., Hretcanu, C., *Golden differential geometry*, Chaos Solitons and Fractals, 38(5)(2008), 1229-1238.
- 9.[Di, St; 03] Didkivska, T.V., St'opochkina, M.V., *Properties of Fibonacci-Narayana numbers*,
In the World of Mathematics, 9(1)(2003), 29–36. [in Ukrainian]
- 10.[EPC; 18] European Payments Council, *Guidelines on Cryptographic Algorithms Usage and Key Management*, 2018
- 11.[ET, SY, MS; 16] Elif, T., Semih, Y., Murat, S., *A note on bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternions*, Chaos Solitons & Fractals V.85,(2016) pages 138-142
- 12.[Fib.] <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
- 13.[Fl, Sh; 13] Flaut, C., Shpakivskyi, V., *On Generalized Fibonacci Quaternions and Fibonacci-Narayana Quaternions*, Adv. Appl. Clifford Algebras, 23(3)(2013), 673-688.
- 14.[FS; 13] Flaut, C., Shpakivskyi, V., *Some identities in algebras obtained by the Cayley-Dickson process. Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 2013, 23, 63-76.

- 15.[FSH; 15] Flaut, C., Shpakivskyi, V., *An Efficient Method for Solving Equations in Generalized Quaternion si Octonion Algebras*, Adv. Appl. Clifford Algebras, 25(2)(2015), 337-350.
- 16.[FS; 18] Flaut, C., Savin, D., *Some special number sequences obtained from a difference equation of degree three*, Chaos, Solitons & Fractals, 106(2018), 67-71.
- 17.[Fl; 19] Flaut, C., *Some application of difference equations in Cryptography and Coding Theory*, Journal of Difference Equations and Applications, 25(7)(2019), 905-920. <https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1619713>
- 18.[Fl, Sa; 19] Flaut, C., Savin, D., *Some remarks regarding l-elements defined in algebras obtained by the Cayley-Dickson process*, Chaos, Solitons & Fractals, 118(2019), 112-116.
- 19.[FSZ; 19] Flaut, C., Savin, D., **Zaharia, G.**, *Some applications of Fibonacci and Lucas numbers*, in Flaut, C., Hoskova-Mayerova, S., Maturo, F., Book chapter in the Springer Book: Algorithms as a foundation for modern applied Mathematics, Springer, 2020, 119–130
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-61334-1_5
<https://arxiv.org/abs/1911.06863>
- 20.[FLSZ; 20] Flaut, C., Savin, D., **Zaharia, G.**, *Properties and applications of some special integer number sequences*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 44(2021), 7442-7454;
<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/mma.6257>
- 21.[FZ; 22] Flaut, C., **Zaharia, G.** *Remarks Regarding Computational Aspects in Algebras Obtained by Cayley–Dickson Process and Some of Their Applications*, Mathematics 2022, 10, 1141.
<https://doi.org/10.3390/math10071141>
<https://www.mdpi.com/2227-7390/10/7/1141>
- 22.[Gi, Sz; 06] Gille, P., Szamuely, T., *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, Cambridge University Press, 2006.
- 23.[HKN; 12] Han, J.S., Kim, H.S., Neggers, J., *Fibonacci sequences in groupoids*, Advances in Difference Equations 2012, 2012:19
- 24.[Ho; 61] Horadam, A. F., *A Generalized Fibonacci Sequence*, Amer. Math. Monthly, 68(1961), 455-459.
- 25.[Ho; 63] Horadam, A. F., *Complex Fibonacci Numbers si Fibonacci Quaternions*, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 289-291.

- 26.[HS; 02] Huang,L., So,W., *Quadratic Formulas for Quaternions*, Applied Mathematics Letters, 15(2002), 533-540.
- 27.[He; 97] Hentzel, I.R. *Identities of Cayley-Dickson Algebras. J. Algebr.*, 1997, 188, 292-309.
- 28.[Is; 84] Isaev, I.M., *Identities of a finite Cayley-Dickson Algebra. Algebra i Logika*, 1984, 23, 407-418.
- 29.[Jo] Johnson, R.C., *Fibonacci numbers and matrices*, Available at <http://maths.dur.ac.uk/dma0rcj/PED/fib.pdf>.
- 30.[JO; 10] Janovska, D., Opfer, G. *A note on the computation of all zeros of simple quaternionic polynomials. Siam J. Numer. Anal.*, 2010, 48, 244-256.
- 31.[Ku; 99] Kuipers, J.B., *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*, Princeton University Press, 1999.
- 32.[Ko; 94] Koblitz, N., *A Course in Number Theory and Cryptography*, Springer Verlag, New-York, 1994, p.65-76.
- 33.[Ko, Oz, Si; 17] Koroglu, M.E., Ozbek,I., Siap,I., *Optimal Codes from Fibonacci Polynomials si Secret Sharing Schemes*, Arab. J. Math, 2017, 1-12.
- 34.[L; 01] Lenstra, A.K, Verheul, E.R., *Selecting Cryptographic Key Sizes*, J. Cryptology, 14(2001), 255-293.
- 35.[Mag.] Magma Computational Algebra System
<http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/handbook/>
- 36.[MAk, HK, MT; 14] Mahmut, A., Hidayet, H. K., Murat, T., *Fibonacci Generalized Quaternions*, Advances in Applied Clifford Algebras volume 24,(2014),pages 631–641
- 37.[Me; 99] Melham, R., *Sums Involving Fibonacci and Pell Numbers*, Portugaliae Mathematica, 56(3)(1999), 309-317.
- 38.[MS; 08] Mierzejewski, D. A., Szpakowski, V. S., *On solutions of some types of quaternionic quadratic equations*, Bull. Soc. Sci. Fiet. Łódź, 58, Ser. Rech. Déform.,55 (2008), 49-58.
- 39.[Lu; 04] Ludkovsky, S.V., *Zeros of Polynomials Over Cayley-Dickson Algebras*. Available online: <https://arxiv.org/pdf/math/0406048.pdf> (accessed on 06.07.2023)

- 40.[Ni; 41] Niven, I., *Equations in quaternions*. *Am. Math. Monthly* **1941**, 48, 654-661.
- 41.[Po; 97] Porter, R.M., *Quaternionic Linear and Quadratic Equations*. *J. Nat. Geom.*, 1997, 11, 101-106.
- 42.[PRD; 10] Pogoruy, A., Rodrigues-Dagnino, R.M., *Some algebraic and analytical properties of coquaternion algebra*, *Adv. Appl. Clifford Alg.*, 20(2010), 79-84.
- 43.[PW; 02] Pumplün, S., Walcher, S. *On the zeros of polynomials over quaternions*. *Commun. Algebra*, 2002, 30, 4007-4018.
- 44.[Ra; 88] Racine, M.L., *Minimal Identities of Octonions Algebras*. *J. Algebr.*, 1988, 115, 251-260.
- 45.[Re; 13] Renault, M., *The Period, Rank, and Order of the (a,b) -Fibonacci Sequence Mod m* , *Mathematics Magazine*, 86(5)(2013), 372-380, <https://doi.org/10.4169/math.mag.86.5.372>.
- 46.[Sa; 17] Savin, D., *About special elements in quaternion algebras over finite fields*, *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 27, June 2017, Issue 2, p. 1801- 1813.
- 47.[Sa; 19] Savin, D. *Special numbers, special quaternions and special symbols*, chapter in the book *Models and Theories in Social Systems*, vol. 179, Springer 2019, ISBN-978-3-030-00083-7, p. 417-430.
- 48.[St; 06] Stakhov, A.P., *Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula”, and a new coding theory*, *Chaos, Solitons and Fractals*, 30(2006), 56-66.
- 49.[St; 07] Stakhov, A.P., *The “golden” matrices and a new kind of cryptography*, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32(2007), 1138-1146.
- 50.[Sc; 66] Schafer, R.D., *An Introduction to Nonassociative Algebras*; Academic Press: New York, NY, USA, 1966.
- 51.[Sc; 54] Schafer, R.D., *On the algebras formed by the Cayley-Dickson process*. *Amer. J. Math.*, 1954, 76, 435-446.
- 52.[SM; 04] Smith, W.D., *Quaternions, octonions, si now, 16-ons, and 2n-ons; New kinds of numbers*, [www. math. temple.edu/ 2dcwds/homepage/nce2.ps](http://www.math.temple.edu/~2dcwds/homepage/nce2.ps), 2004.
- 53.[SS; 01] Serodio, R., Siu, L.S., *Zeros of Quaternion Polynomials*. *Appl. Math. Lett.*, 2001, 14, 237-239.

- 54.[SPV; 01] Serodio, R., Pereira, E., Vitoria, J., *Computing the Zeros of Quaternion Polynomials. Comput. Math. Appl.*, 2001, 42, 1229-1237.
- 55.[TK; 01] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley Sons, 2001
<https://books.google.ro/books?id=1iDKKceqD2sCprintsec=frontcoverhl=rov=onepageqf=false> (accessed on 30.06.2023).
- 56.[Wa; 60] Wall, D.D., *Fibonacci Series Modulo m*, The American Mathematical Monthly, 67(6)(1960), 525-532.
- 57.[WWW1] <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
- 58.[WWW2] <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/lucasNbs.html>
- 59.[WWW3] <http://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html>
- 60.[WWW4] <https://study.com/academy/lesson/how-to-prove-cassinis-identity.html>
- 61.[WWW5] <https://mathworld.wolfram.com/CatalansIdentity.html>
- 62.[WWW6] <https://fmi.univ-ovidius.ro/wp-content/uploads/2021/scm/abstractsB.pdf>
- 63.[Z; 72] Zeckendorf, E., *Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. R. Sci. Liège, 41(1972), 79-182.
- 64.[Zo; 41] Zorn, M., *Alternative rings and related questions I: Existence of the radical. Ann. of Math.* 1941, 42, 676-686.
- 65.[ZM; 23] **Zaharia, G.**, Munteanu, D., *A Method for Solving quadratic Equations in Real Quaternion Algebra by using Scilab software*, to the journal Italian Journal of Pure and Applied Mathematics (IJPAM-2023-76 is the manuscript reference number) for publication, accepted: 10.08.2023
The article has also been posted on arXiv:
<http://arxiv.org/abs/2304.08930>