

UNIVERSITATEA "OVIDIUS" DIN CONSTANȚA

ȘCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

DOMENIUL DE DOCTORAT MATEMATICĂ

Teză de doctorat

Clase speciale de algebre și câteva din aplicațiile acestora

Conducător de doctorat
Prof. univ. dr. habil. Cristina Flaut

Student doctorand
Radu Vasile

CONSTANȚA, Septembrie 2021

Cuprins

1		
Introducere	3	
1.1	Motivație	3
1.2	Rezultate principale	5
1.2.1	Coduri atașate algebrelor Wajsberg și algebrelor MV . . .	5
1.2.2	Numărul algebrelor Wajsberg și reprezentarea acestora . .	5
1.2.3	Algoritm pentru construcția algebrelor BCK comutative și mărginite	6
1.2.4	Noi modalități de construcție pentru algebre BCK	6
1.2.5	Arbori BCK	7
1.2.6	Algoritm computerizat pentru generarea algebrelor BCK .	7
1.3	Structura lucrării	9
2	Preliminarii	11
2.1	Algebre BCK	11
2.1.1	Definirea algebrelor BCK	12
2.1.2	Proprietățile algebrelor BCK	13
2.1.3	Exemple de algebre BCI / BCK și proprietățile acestora .	13
2.2	Algebre MV	14
2.3	Algebre Wajsberg	16
2.4	Conexiune între algebrele Wajsberg, MV și BCK	17
3	Algebre BCK	19
3.1	Definiții alternative pentru BCK-algebre	19
3.2	Construirea algebrelor BCK	21
3.2.1	Pornind de la un sistem axiomatic	21
3.2.2	Utilizarea relației de ordine	23
3.2.3	Utilizarea extinderilor	24
3.2.4	Extinderea Iseki	24
3.3	Noi tipuri de extinderi pentru algebre BCK	25
3.3.1	Extinderea pseudo-Iseki	25
3.3.2	Construcția Iseki generalizată	26
3.3.3	Extinderea prin involuții	29
3.4	Noi relații pentru algebre BCK pozitiv-implicative	33

3.5	Structura algebrilor BCK	39
3.5.1	Tabelul operației unei algebre BCK	39
3.5.2	Arbori BCK	41
3.5.3	Importanța arborilor BCK	43
4	Alte clase de algebre logice	45
4.1	Algebre Wajsberg și MV	45
4.1.1	Algebre MV	45
4.1.2	Algebre Wajsberg	46
4.2	Teorema reprezentării pentru algebrele Wajsberg	47
4.3	Un algoritm pentru construirea algebrilor Wajsberg	48
4.4	Algebre Wajsberg de ordine n , $n \leq 9$	49
4.4.1	Algebre Wajsberg de ordinul 4.	49
4.4.2	Algebrele Wajsberg de ordinul 6	51
4.4.3	Algebre Wajsberg de ordinul 8	56
4.4.4	Algebre Wajsberg de ordinul 9	61
4.5	Construirea algebrilor BCK comutative și mărginite folosind algebre Wajsberg	63
4.6	Exemple de algebre BCK comutative și mărginite obținute folosind algebre Wajsberg	64
5	Coduri bazate pe algebre logice	67
5.1	Coduri bazate pe algebre BCK	67
5.2	Coduri bazate pe algebre MV și Wajsberg	69
5.2.1	Coduri din algebre MV	69
5.2.2	Coduri bazate pe algebre Wajsberg	72
5.2.3	Exemplu	74
6	Cod software pentru generarea de algebre BCK	76
6.1	Descrierea algoritmului	76
6.2	Performanța algoritmului	77
6.3	Codul sursă al algoritmului	78
7	Concluzii	87
7.1	Cercetări ulterioare	87
A	Exemple de algebre BCK obținute folosind computerul	89
B	Lista publicațiilor proprii	100
	Referințe	100

Capitolul 1

Introducere

1.1 Motivație

Structurile algebrice joacă un rol important în multe aplicații practice. Criptografia ([33]), teoria codurilor corectoare de erori ([30], [11]), inteligența artificială ([14]) sunt doar câteva exemple de astfel de aplicații. Un interes special a fost suscitată recent de structurile algebrice numite „algebre”. Sub acest termen umbrelă, sunt incluse multe tipuri de structuri algebrice, fiind atât structuri algebrice definite ca module sau spații vectoriale peste un corp, cum ar fi algebre obținute prin procesul Cayley Dickson ([41]), sau algebre logice, care sunt mulțimi înzestrate cu anumite operații, care respectă anumite axiome (unele exemple pot fi găsite în [24], [25], [20], [7], [1]). Deci, pornind de la termenul „algebră”, putem împărți aceste structuri în mai multe clase, de unde și titlul acestei lucrări: „Clase speciale de algebre”.

În dezvoltările recente ale comunicațiilor fără fir, problema codificării eficiente a devenit din ce în ce mai complicată, mai ales după momentul introducerii comunicării prin antene multiple atât la transmitere, cât și la recepție (MIMO Channels). Primul astfel de cod, bazat pe algebre cu diviziune, a fost construit de Alamouti în 1998 și prezentat în [2]. În articol, Alamouti folosește algebra cuaternionilor reali, luând reprezentarea acesteia peste un subcorp maximal (în sensul incluziunii), și anume peste $\mathbb{C}$, mulțimea numerelor complexe, construind un Codebook cu toate proprietățile necesare. În [37] se arată cum algebrele cu diviziune pot fi instrumente importante în construirea codurilor pentru astfel de situații. Mai precis, se arată cum poate fi utilizată o clasă specifică de algebre cu diviziune, algebre ciclice cu diviziune. În acest articol, algebrele cu diviziune sunt presupuse a fi necomutative de la început, prin definiție. În [44] clasa algebrelor ciclice cu diviziune este restrânsă la algebrele de cuaternioni și bicuaternioni generalizați. Deși acestea sunt cazuri particulare de algebre ciclice, ele au o proprietate importantă. Au atașată o formă pătratică care poate fi utilizată pentru a determina când o algebră este o algebră cu diviziune sau când este una scindată,

lucru destul de dificil de determinat altfel. Deși acest articol vorbește și despre algebrele cu diviziune comutative, autorii spun că sunt interesați doar de acele algebre necomutative, motivul fiind simplu, prin construcție, aceste algebre cu diviziune necomutative au proprietatea de a produce matrici cu proprietatea fully diverse, adică diferența dintre oricare două matrice are un determinant nenul.

În [38], se face un pas mai departe și sunt construite și studiate în termeni de teoria codurilor, algebre neasociative. De asemenea, în acest articol, acele elemente ale unei algebre care au un set mai bogat de proprietăți sunt exploatate într-un mod interesant, cum ar fi nucleul algebrei non-asociative, adică toate acele elemente care se asociază cu orice alt element din algebră. Cu ajutorul acestora, se arată cum se poate construi o reprezentare peste un subcorp maximal al unei astfel de algebre, obținând astfel coduri corectoare de erori.

Pe de altă parte, în [26] este prezentat un rezultat spectaculos, obținerea unui block-code binar pornind de la o algebră BCK. În acest articol, autorii lansează o provocare întrebând dacă este posibilă construirea unei algebre BCK dintr-un block-code binar. Răspunzând provocării, în [15] autorul construiește o algebră BCK pornind de la codul binar utilizat în [26]]. Se constată că cele două algebre BCK asociate cu același cod sunt diferite și nu au proprietăți comune. Astfel, se stabilește o nouă proprietate a două algebre BCK, aceea de a fi „Code similar”. Subiectul cu privire la conexiunile dintre codurile binare și algebrele BCK este, de asemenea, dezvoltat în [39], iar în [5] autorii introduc block-code-uri n-are atașate la algebre BCK. Plecând de la algebre BCK, s-au făcut diverse generalizări, rezultând în definirea unor noi tipuri de algebre logice: BE-algebre [28], Dual BCK-algebre [29] și altele [23]. Pe de altă parte, au fost stabilite relații de echivalență între diferite clase de algebre logice și BCK-algebre. Pe baza acestei cercetări, dar și a relațiilor de echivalență între diferite clase de algebre logice, apare o întrebare: „Se pot atașa coduri corectoare de erori la alte tipuri de algebre logice”? Un prim răspuns este dat în [31], unde autorul, folosindu-se de echivalența între algebrele hilbert și algebrele BCK pozitiv implicative, atașează coduri corectoare de erori binare algebrelor hilbert. Bazat pe această extindere, Ne-am dorit să cercetăm dacă se pot atașa coduri binare și altor tipuri de algebre logice. În același timp, pornind de la răspunsurile găsite pentru această primă întrebare, au apărut și alte întrebări interesante: „Sunt aceste coduri utilizabile în forma lor actuală”? „Cine influențează pe cine? Codurile influențează proprietățile algebrelor logice? Sau proprietățile algebrelor logice influențează, în sens pozitiv, construcția codurilor bune?” „Putem găsi noi lucruri interesante despre algebrele logice cercetând codurile atașate?” Și multe altele, care își vor găsi răspunsuri în paginile acestei lucrări.

1.2 Rezultate principale

În primul rând, menționăm că rezultatele noi și originale ale acestei lucrări provin din următoarele articole sau capitole de carte: [17], [18], [19], [42], [43]. În plus față de aceste rezultate, pentru o scurtă introducere în lumea codurilor de corectare a erorilor, cititorul poate consulta articolul [16].

1.2.1 Coduri atașate algebrelor Wajsberg și MV

Scopul lucrării de față este cercetarea unor clase de algebre și găsirea de noi aplicații ale acestora. În particular, observând rezultatele din [26] (prezentate în 5.1), ne-am pus întrebarea dacă acele rezultate pot fi transferate către alte clase de algebre logice, date fiind relațiile de echivalență dintre ele. În [19], am construit un aparat matematic similar cu cel din [26] și am atașat astfel, algebrelor MV și Wajsberg, coduri corectoare de erori binare (vezi 5.2.1 și 5.2.2). În cazul algebrelor MV, am construit și funcția distanță atașată unui astfel de cod, arătând că ea este echivalentă cu distanța Hamming cunoscută în cazul codurilor (vezi 5.2.13). După atașarea acestor coduri, am arătat că, dată fiind o algebră BCK comutativă și mărginită, împreună cu algebrele asociate MV și Wajsberg, se obține același cod de corectare a erorilor (Teorema 5.2.25). Mai mult, am arătat că acest cod de corectare a erorilor binare acționează ca un șablon pe care putem plasa oricare dintre cele trei tipuri de algebre (vezi 5.2.27).

1.2.2 Numărul de algebre Wajsberg și reprezentarea lor

Studiind codurile atașate algebrelor MV și Wajsberg, am găsit o modalitate simplă de a număra algebrele Wajsberg de un anumit ordin n , folosind descompunerile unice în factori ale lui n (teorema 4.2.7), teorema prezentată și în [19]). Se pune acum problema dacă putem găsi o modalitate simplă, mai simplă decât cele existente deja, de a construi algebre Wajsberg de un anumit ordin n . Folosind unele rezultate existente despre algebrele MV (Propoziția 4.1.8), am introdus o teoremă de reprezentare pentru algebrele Wajsberg (Teorema 4.2.8), prezentată și în [17]. Necesitatea construirii acestor algebre venea, printre altele, din nevoia de a obține exemple de algebre BCK comutative și mărginite, prin intermediul cărora să fie transferate, la algebre MV, codurile corectoare de erori. În [17], am introdus o astfel de metodă de construire a algebrelor Wajsberg de un anumit ordin n (Observația 4.3.1) și, ca exemplu, am construit toate algebrele Wajsberg de ordinul n , cu $n \leq 9$. Am arătat astfel că pentru ordinul n , cu n prim, avem o singură algebră Wajsberg, o algebră care este total ordonată (până la un izomorfism). În particular, pentru ordinele 2, 3, 5, 7, avem o algebră Wajsberg total ordonată (până la un izomorfism). Pentru ordinele 4 (Secțiunea 4.4.1), 6 și 9, avem 2 algebre Wajsberg, una total ordonată și una parțial ordonată, până la un izomorfism. În ceea ce privește toate algebrele Wajsberg de ordinul 6,

acestea sunt 25 (Secțiunea 4.4.2). Pentru ordinul 9, avem 5040 algebre Wajsberg (secțiunea 4.4.4). Pentru ordinul 8, avem trei algebre Wajsberg, până la un izomorfism, una total ordonată și două parțial ordonate. În totalitate, acestea sunt 1441 algebre Wajsberg de ordinul 8 (Secțiunea 4.4.3).

1.2.3 Algoritm pentru construcția algebrelor BCK comutative și mărginite

Pornind de la algoritmul de construcție al algebrelor Wajsberg (Observația 4.3.1), introdus în [17], și de la relația de echivalență dintre algebre Wajsberg și algebre BCK comutative și mărginite, am introdus în [18] un algoritm de construcție pentru algebre BCK comutative și mărginite (vezi secțiunea 4.5). De asemenea, am prezentat câteva exemple de astfel de algebre obținute cu acest algoritm (a se vedea secțiunea 4.6).

1.2.4 Noi modalități de a construi algebre BCK

În timpul cercetărilor privind codurile atașate algebrelor logice, a devenit din ce în ce mai clar că avem nevoie de cât mai multe exemple de algebre BCK. Literatura existentă oferă puține astfel de exemple, subiectul construirii algebrelor BCK fiind unul foarte actual și de mare interes. Printre sursele bibliografice cu exemple de algebre BCK menționăm: [34], care prezintă algebre BCK până la ordinul 5, construite folosind sistemul axiomatic al algebrelor BCK, [13], în care sunt construite algebre BCI până la ordinul 4, folosind relația de ordine existentă pe o astfel de algebră și [27], în care se construiește o algebră BCK de ordinul 16, pornind de la o algebră BCK de ordinul 2, folosind variabilele existente în sistemul logic neutrosific. O altă modalitate cunoscută de a obține exemple de algebre BCI sau BCK este prin utilizarea extinderilor de la algebre de ordinul n la algebre de ordinul $n + 1$. În cazul algebrelor BCK, singura extindere cunoscută este extinderea Iseki, prezentată în secțiunea 3.2.4. Problema cu această extindere este că algebrele obținute pierd proprietatea de comutativitate, în cazul în care algebra sursă avea această proprietate. Așadar, am vrut nu doar să obținem exemple de algebre BCK, ci și să obținem exemple de algebre BCK care au anumite proprietăți. Un prim rezultat este introducerea a două noi extinderi pentru algebre BCK, extinderea Pseudo-Iseki (Secțiunea 3.3.1) și extinderea prin involuții (Secțiunea 3.3.3), rezultate prezentate și în [42]. Prin extinderea pseudo-Iseki, se pot obține algebre de ordin superior cu proprietățile algebrei sursă, mai puțin proprietatea de a fi mărginită. Pe de altă parte, prin extinderea prin involuții, obținem algebre BCK mărginite și comutative de ordinul $n + 1$, din algebre BCK comutative de ordinul n . Cu toate acestea, în acest caz, proprietatea unei algebre BCK de a fi pozitiv implicativă dispare în unele cazuri. Un al doilea rezultat a fost prezentat în [43] și constă în introducerea unui proces gene-

realizat de extindere pentru algebre BCK, numit „construcția generalizată Iseki” pentru algebre BCK. În același timp, am arătat că extinderea Iseki și extinderea pseudo-Iseki sunt cazuri particulare ale acestui proces (a se vedea secțiunea 3.3.2). De asemenea, în [43], pornind de la exemplul din [27], am analizat în detaliu comportamentul elementelor unei algebre BCK pozitiv implicative și am introdus noi relații valide pentru acest tip de algebre BCK (Teorema 3.4.1). Pe baza acestei teoreme, am construit o algebră BCK pozitiv implicativă de ordinul 6 (Propoziția 3.4.6) și una de ordinul 14 (Propoziția 3.4.8).

1.2.5 Arbori BCK

Pornind de la construcția algebrelor BCK, folosind definiția lor, am observat că există trei algebre BCK de ordinul 3, până la un izomorfism. De fapt, acestea sunt 5, primele 4 fiind izomorfe două câte două (vezi secțiunea 3.2.1). Folosind această observație, dar și faptul că orice BCK-algebră de ordinul n conține o BCK-algebră de ordinul $n - 1$, am obținut rezultate interesante cu privire la structura clasei de algebre BCK. Un astfel de rezultat este că orice algebră BCK de ordinul n conține o algebră BCK de ordinul 3 (Propoziția 3.5.3) și că, prin urmare, putem construi algebre de ordin n prin extinderi succesive de la ordinul 3 la ordinul n . Structura astfel creată este un grafic format din trei arbori, arbori pe care i-am denumit arbori BCK (Definiția 3.5.8). Interesant despre acești arbori, este faptul că fiecare conține algebre BCK cu o anumită proprietate. În același timp, acești arbori nu sunt independenți, ei având puncte de intersecție (Observația 3.5.9) reprezentate de algebre BCK izomorfe (Observația 3.5.10). La fiecare astfel de punct de intersecție, algebrele BCK își pierd una sau mai multe proprietăți. Aceste rezultate au fost prezentate și în [42].

1.2.6 Algoritm computerizat pentru generarea algebrelor BCK

Pentru a obține cât mai multe exemple de algebre BCK, pe baza rezultatelor menționate anterior, am scris un program care generează algebre BCK de un anumit ordin. Programul este scris în limbajul de programare Python ([45]), dar poate fi ușor transferat în orice alt limbaj de programare. Programul generează algebre BCK până la ordinul 6, într-un timp rezonabil (detaliile pot fi găsite în secțiunea 6.2). Algoritmul începe de la cele trei algebre BCK de ordinul 3 (vezi Secțiunea 3.2.1) și generează cei trei arbori BCK (vezi Secțiunea 3.5.2) până la ordinul solicitat. Tehnica utilizată este similară cu tehnica de parcurgere în adâncime utilizată în cazul grafurilor (a se vedea [47] Pagina 191). Pentru a genera o BCK-algebră de ordinul n , algoritmul ia tabelul unei BCK-algebre de ordinul $n - 1$ și îi adaugă un rând nou și o nouă coloană, obținând astfel un tabel cu n rânduri și n coloane. Capetele liniei și coloanei sunt fixate de axiomele definiției algebrelor BCK. Astfel, rămân $(n - 2)$ poziții pe noul rând și noua coloană cărora

li se pot da valori între 0 și $(n - 1)$. Iterativ, algoritmul dă valori acestor poziții, începând de la 0 și mergând la $(n - 1)$, obținând la fiecare pas un nou tabel cu n rânduri și n coloane. Algoritmul verifică, la fiecare atribuire, să nu dea valoarea 0 în același timp pozițiilor corespondente din tabel, pentru a respecta axioma 4 din definiția algebrilor BCK. Pentru fiecare tabel astfel generat, se verifică dacă îndeplinește axioma 1 din definiția algebrilor BCK, celelalte patru fiind respectate din construcție. Dacă se identifică o algebră BCK, algoritmul verifică și care sunt proprietățile sale. Prin urmare, programul își dovedește utilitatea nu numai în generarea de exemple, ci și în verificarea dacă un anumit tabel poate reprezenta o algebră BCK sau în verificarea proprietăților unei algebre BCK. Având în vedere echivalențele dintre algebre BCK și alte tipuri de algebre, programul poate fi extins pentru a lucra cu alte tipuri de algebre și chiar pentru a efectua conversii între diferite tipuri de algebre logice. Până în prezent, nu avem cunoștință de existența unui program similar. Complexitatea unui astfel de algoritm a fost discutată pentru prima dată în [42], unde am arătat că numărul de tabele care trebuie verificate pentru a găsi algebre BCK, atunci când facem tranziția de la ordinul $n - 1$ la ordinul n , este $(n^{(n-2)})^2 - (2^{(n-2)} - 1)$ (Propoziția 3.5.1) și că numărul total de tabele care trebuie verificat pentru toate ordinele de la 2 la n este $\prod_{i=2}^n (i^{(i-2)})^2 - (2^{(i-2)} - 1)$ (Propoziția 3.5.2). Din aceste calcule, a fost ușor să vedem că avem de-a face cu o complexitate de $O((n^{(n-2)})^2)$, ceea ce ne-a arătat că această activitate este destul de dificilă chiar și de la ordine mici (a se vedea secțiunea 3.5). Totuși, algoritmul reușește să genereze, în câteva secunde, algebre BCK până la ordinul 5. Pentru ordinul 6, este nevoie de aproape o oră. Cu toate acestea, acesta este un pas înainte, deoarece, în afară de câteva exemple disperate, literatura nu conținea exemple de algebre BCK mai mari de ordinul 5. Prin programul rezultat, am obținut toate algebrele de ordinul 6 și chiar unele de ordin 7. Algoritmul în detaliu, precum și codul sursă au fost prezentate în [43]. Fiind o primă variantă a unui astfel de algoritm, este evident că se pot face îmbunătățiri. O primă îmbunătățire pe care am făcut-o a fost paralelizarea procesului de generare a arborilor BCK. Astfel, dacă un computer are 3 sau mai multe nuclee de procesor, fiecare arbore BCK va fi generat folosind unul dintre aceste nuclee. În versiunea secvențială, primul arbore BCK este generat mai întâi, apoi al doilea și, în final, al treilea. O îmbunătățire care ar putea fi adusă acestui program este introducerea unui sistem de stocare a algebrilor generate. Astfel, în loc să genereze toate algebrele până la ordinul n la fiecare rulare, ar putea genera doar cele lipsă. O altă îmbunătățire ar putea fi schimbarea limbajului de programare într-unul mai rapid, Python fiind recunoscut ca un limbaj lent. Aceste îmbunătățiri vor face obiectul unor cercetări ulterioare.

Nu în ultimul rând, algoritmul de generare ar putea fi paralelizat la nivelul tabelelor, astfel încât generarea tabelelor și chiar verificarea axiomei 1, să fie făcute în paralel.

1.3 Structura lucrării

După un capitol de preliminarii (Capitolul 2), în care îl familiarizăm pe cititor cu conceptele utilizate pe tot parcursul lucrării, începem călătoria în lumea algebrilor cu un prim capitol (Capitolul 3), despre BCK-algebre. În acest capitol, vom vedea cum, pornind de la studii despre codurile atașate algebrilor BCK, s-au descoperit noi rezultate despre algebrele BCK și despre structura acestei clase de algebre. Capitolul va prezenta rezultatele din [42] și [43]. Se arată că structura clasei de algebre BCK este formată din 3 arbori, fiecare arbore având algebre cu o anumită proprietate (Secțiunea 3.5.2). Acești arbori nu sunt independenți (Observația 3.5.9). Au puncte de intersecție. Aceste puncte de intersecție sunt reprezentate de algebre BCK izomorfe între ele (Observația 3.5.10). Interesant este că în aceste puncte de intersecție, algebrele BCK își pierd din proprietăți. În același timp, sunt introduse noi extinderi pentru algebre BCK (secțiunea 3.3) și noi identități valabile pentru algebre BCK pozitiv implicative (teorema 3.4.1). Scopul capitolului este de a găsi noi modalități de a construi algebre BCK de ordin superior, începând de la algebre BCK de ordin mic. Stabilirea acestor rezultate s-a bazat și pe utilizarea unui algoritm computerizat pentru generarea de algebre BCK, un algoritm construit de autor și prezentat în [43], inclus ca un capitol separat în această lucrare (vezi Capitolul 6).

În capitolul următor, (Capitolul 4), sunt prezentate noi rezultate despre algebre Wajsberg. Un loc important îl ocupă teorema de reprezentare a algebrilor Wajsberg (teorema 4.2.8) și algoritmul de construcție a algebrilor Wajsberg bazat pe această teoremă (Observația 4.3.1). Aceste rezultate sunt, de asemenea, produsul studierii codurilor binare atașate algebrilor logice. De asemenea, în acest capitol, folosind echivalența dintre algebre BCK comutative și mărginite cu algebre Wajsberg, prezentăm un algoritm pentru construirea algebrilor BCK comutative și mărginite, acesta fiind un alt mod de a construi algebre BCK (Secțiunea 4.5). În finalul capitolului, ca exemplificare a algoritmului de construcție a algebrilor Wajsberg, sunt prezentate algebrele Wajsberg de ordin n cu $n \leq 9$, precum și construcția unor algebre BCK mărginite și comutative pornind de la algebre Wajsberg. Rezultatele prezentate sunt din [17], cele legate de algebrele Wajsberg, precum și din [18], cele legate de algebrele BCK comutative și mărginite.

În capitolul 5, codurile atașate algebrilor BCK, bazate pe [26] și [15], sunt prezentate ca o introducere (Secțiunea 5.1). După, în secțiunile următoare, sunt prezentate codurile atașate algebrilor Wajsberg și algebrilor MV, precum și rezultatele despre proprietățile acestor coduri (secțiunile 5.2.1 și 5.2.2). Aceste rezultate au fost prezentate mai întâi în [19].

Ultimul capitol (Capitolul 6) prezintă în detaliu algoritmul computerizat pentru generarea algebrilor BCK, precum și proprietățile acestuia. În această lucrare, am inclus un apendice, Anexa A, care prezintă toate algebrele BCK de ordinul n , cu $n \leq 5$ din cel de-al treilea arbore BCK. Desigur, lucrarea nu ar putea fi finalizată fără un capitol de concluzii, în care vom prezenta concluziile

noastre și diverse posibilități pentru cercetări ulterioare pe această temă.

Cuvinte cheie: Algebre BCK, Algebre MV, Algebre Wajsberg, Arbori BCK, Extindere BCK, Algoritm computerizat pentru algebre BCK, Coduri corectoare de erori binare.

1.4 ACKNOWLEDGEMENTS

„Această lucrare a fost parțial realizată în cadrul proiectului Excelența academică și valori antreprenoriale - sistem de burse pentru asigurarea oportunităților de formare și dezvoltare a competențelor antreprenoriale ale doctoranzilor și postdoctoranzilor (ANTREPRENORDOC), cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Capital Uman, 2014-2020, Contract nr. 36355/23.05.2019 POCU/380/6/13 - Cod SMIS: 123847.”

1.5 Lista publicațiilor proprii

1. S. Hoskova-Mayerova C. Flaut, D. Flaut and **R. Vasile**, *From old ciphers to modern communications*, Advances in Military Technology **14** (2019), 79–88.
2. Arsham Borumand Saeid, Cristina Flaut, Sarka Hoskova-Mayerova and **Radu Vasile**, *Wajsberg algebras of order n , $n \leq 9$* , Neural Computing and Application **32** (2020), no. 17, 13301–13312.
3. Sarka Hoskova-Mayerova, Cristina Flaut and **Radu Vasile**, *Some remarks regarding finite bounded commutative BCK-algebras*, Algorithms as a foundation for modern applied Mathematics (Cristina Flaut, ed.), Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, 2020.
4. Cristina Flaut and **Radu Vasile**, *Wajsberg algebras arising from binary block-codes*, Soft Computing **24** (2020), no. 8, 6047–6058.
5. **Radu Vasile**, *New ways for building BCK-algebras of higher-order*, Tbilisi Mathematical Journal **13** (2020), no. Special Issue iecmsa-2019, 111–124.
6. **Radu Vasile**, *New remarks about positive implicative BCK-algebras*, Italian journal of pure and applied mathematics (2021), acceptat.

Bibliografie

- [1] M. Akram and Hee Sik Kim, *On K-algebras and BCI-algebras*, International Mathematical Forum **2** (2007), no. 12, 583–587.
- [2] S.M. Alamouti, *A simple transmit diversity technique for wireless communications*, IEEE J. Selected Areas Communications (1998), no. 16, 1451–1458.
- [3] I.C. Baianu, *Cell genome and interactome nonlinear dynamic models in Lukasiewicz logic algebras. neoplastic transformation models in a lukasiewicz topos.*, Cogprints preprint (2004), June 25th, GN 0406050.
- [4] R. Belohlavek and V. Vilem Vychodil, *Residuated lattices of size ≤ 12* , Order **27** (2010), 147–161.
- [5] Arsham Borumand Saeid, Cristina Flaut, Šárka Hošková-Mayerová, Mor-teza Afshar Jahanshahi, and Marjan Kuchaki Rafsanjani, *Some connections between BCK-algebras and n-ary block codes*, Soft Computing **22** (2018).
- [6] D. Buşneag, *Categories of algebraic logic*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2006.
- [7] C.C. Chang, *Algebraic analysis of many-valued logic*, Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 467–490.
- [8] C.C. Chang, *A new proof of the completeness of the lukasiewicz*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 74–90.
- [9] R Cignoli, I M. L. D’Ottaviano, and D Mundici, *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, Trends in Logic, Studia Logica Library, vol. 7, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 01 2000.
- [10] R. Cignoli and A. T. Torell, *Boolean products of MV-algebras: Hypernormal MV-algebras*, J. Math. Anal. Appl. **199** (1996), 637–653.
- [11] Steven T. Dougherty, *Algebraic coding theory over finite commutative rings*, Springer, 2017.

- [12] W.A. Dudek, *On embedding hilbert algebras in BCK-algebras*, *Mathematica Moravica* **3** (1999), 25–28.
- [13] Wiesław Dudek, *Remarks on the axioms system for BCI-algebras*, *Prace Naukowe WSP w Czechochowie, ser. Matematyka* **2** (1996), 46–61.
- [14] Li Fanzhang, Zhang Li, and Zhang Zhao, *Lie group machine learning*, de Gruyter, 2019.
- [15] C. Flaut, *BCK-algebras arising from block-codes*, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* **4** (2015), no. 28, 1829–1833.
- [16] C. Flaut, D. Flaut, S. Hosková-Mayerová, and **R. Vasile**, *From old ciphers to modern communications*, *Advances in Military Technology* **14** (2019), 79–88.
- [17] Cristina Flaut, Sárka Hosková-Mayerová, Arsham Borumand Saeid, and **Radu Vasile**, *Wajsberg algebras of order n , $n \leq 9$* , *Neural Computing and Application* **32** (2020), no. 17, 13301–13312.
- [18] Cristina Flaut, Sárka Hosková-Mayerová, and **Radu Vasile**, *Some remarks regarding finite bounded commutative BCK-algebras*, *Algorithms as a foundation for modern applied Mathematics* (Cristina Flaut, ed.), *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Springer, 2020.
- [19] Cristina Flaut and **Radu Vasile**, *Wajsberg algebras arising from binary block-codes*, *Soft Computing* **24** (2020), no. 8, 6047–6058.
- [20] Josep Font, Antonio-Jesús Rodríguez, and Antoni Torrens, *Wajsberg algebras*, *Stochastica* **8** (1984), 5–31.
- [21] Hernando Gaitan, *About quasivarieties of P -algebras and wajsberg algebras*, Ph.D. thesis, Iowa State University, 1990, Retrospective Theses and Dissertations. 9440; <https://lib.dr.iastate.edu/rtd/9440>.
- [22] U. Hohle and S. E. Rodabaugh, *Mathematics of fuzzy sets: Logic, topology and measure theory*, Springer Science and Business Media, LLC, 1999.
- [23] Min Hong, Sung, Jun, Young Bae, and Mehmet Öztürk, *Generalizations of BCK-algebras*, *Scientiae Mathematicae Japonicae* **58** (2004).
- [24] Yasuyuki Imai and Kiyoshi Iséki, *On axiom systems of propositional calculi, xiv*, *Proc. Japan. Academic.* **42** (1966), 19–22.
- [25] K. Iséki and S. Tanaka, *An introduction to the theory of BCK-algebras*, *Math. Jpn.* **23** (1978), 1–26.

- [26] Y. B. Jun and S. Z. Song, *Codes based on BCK-algebras*, Inform. Sciences. (2011), no. 181, 5102–5109.
- [27] Young Bae Jun, Seok-Zun Song, Florentin Smarandache, and Hashem Bordbar, *Neutrosophic quadruple BCK/BCI-algebras*, Axioms **7** (2018), 16.
- [28] Hee Sik Kim and Young Hee Kim, *On BE-algebras*, Scientiae Mathematicae Japonicae **66** (2007).
- [29] Kyung Kim and Yong Ho Yon, *Dual BCK-algebra and MV-algebra*, Scientiae Mathematicae Japonicae **66** (2007).
- [30] S. Ling and C. Xing, *Coding theory: A first course*, Cambridge University Press, 2004.
- [31] Antonio Maturo, Šárka Hošková-Mayerová, Daniela-Tatiana Soitu, and Janusz Kacprzyk (eds.), *Recent trends in social systems: Quantitative theories and quantitative models*, Studies in Systems, Decision and Control, vol. 66, ch. Some Connections Between Binary Block Codes and Hilbert Algebras, pp. 249 – 256, Springer International Publishing Switzerland, 2017.
- [32] W McCulloch and W. Pitts, *A logical calculus of ideas immanent in nervous activity*, Bulletin of Mathematical Biophysics **5** (1943), 115–133.
- [33] Alko R. Meijer, *Algebra for cryptologists*, Springer, 2016.
- [34] J. Meng and Y. B. Jun, *BCK-algebras*, Kyung Moon Sa Co., Seoul, 1994.
- [35] Sambasiva Rao Mukkamala, *A course in BE-algebras*, Springer Nature Singapore Pte Ltd., Singapore, 2018.
- [36] D. Mundici, *MV-algebras-a short tutorial*, Department of Mathematics Ulisse Dini, University of Florence, 2007.
- [37] Frédérique E. Oggier, Jean-Claude Belfiore, and Emanuele Viterbo, *Cyclic division algebras: A tool for space-time coding*, Foundations and Trends in Communications and Information Theory **4** (2007), no. 1, 1–95.
- [38] S Pumplün and Thomas Unger, *Space-time block codes from nonassociative division algebras*, Computing Research Repository - CORR **5** (2010).
- [39] A.B. Saeid, H. Fatemidokht, C. Flaut, and M. Kuchaki Rafsanjanib, *On codes based on BCK-algebras*, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **29** (2015), no. 5, 2133–2137.
- [40] Zahra Samaei, Mohammad Azadani, and Leila Ranjbar, *A class of BCK-algebras*, Int. J. Algebra **5** (2011), no. 28, 1379–1385.

- [41] Richard D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Dover Publications, 2017.
- [42] **Radu Vasile**, *New ways for building BCK-algebras of higher-order*, Tbilisi Mathematical Journal **13** (2020), no. Special Issue iecmsa-2019, 111–124.
- [43] ———, *New remarks about positive implicative BCK-algebras*, Italian journal of pure and applied mathematics (2021), accepted.
- [44] Thomas Unger and Nadya Markin, *Quadratic forms and space-time block codes from generalized quaternion and biquaternion algebras*, Computing Research Repository - CORR **57** (2008).
- [45] Guido Van Rossum and Fred L. Drake, *Python 3 reference manual*, CreateSpace, Scotts Valley, CA, 2009.
- [46] J. Wang, T. Davvaz, B. He, and P. F., *On derivations of MV-algebras*, 2010, <https://arxiv.org/pdf/1709.04814.pdf>.
- [47] Ryan T. White and Archana Tikayat Ray, *Practical discrete mathematics - discover math principles that fuel algorithms for computer science and machine learning with python*, Packt Publishing Ltd, Livery Place 35 Livery Street Birmingham B3 2PB, UK, 2021.
- [48] J. Zhan, B. Davvaz, W. A. Dudek, Y. B. Jun, and H. S. Kim, *Fuzzy logical algebras and their applications*, The Scientific World Journal (2015), Article ID 682648.