

UNIVERSITATEA "OVIDIUS" CONSTANȚA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Algebre Milnor și hipersuprafețe proiective

TEZĂ DE DOCTORAT

REZUMAT

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC
PROF. UNIV. DR. MIRELA ȘTEFĂNESCU

DOCTORAND
GABRIEL STICLARU

CONSTANȚA
2012

Abstract

Fie un polinom omogen f cu coeficienti complexi. Notam cu $M(f)$ algebra Milnor asociata si cu $V(f)$ hipersuprafata definita de ecuatia $f = 0$ in spatiul proiectiv complex. Algebra $M(f)$ este o $\mathbb{C}$ -algebra graduata.

Intentia principala al acestei teze este sa exprime seria Hilbert-Poincaré pentru algebra Milnor $M(f)$ in termenii geometriei hipersuprafetei $V(f)$. Rezultatul este cunoscut pentru cazul cand $V(f)$ este nesesingulara (neteda). Scopul acestei cercetari este sa discute cazul cand $V(f)$ are numai singularitati izolate.

In primul rand se construiesc o rezolutie libera pentru algebra Milnor (sau Jacobiana) $M(f)$. In particular, aceasta rezolutie obtine ca dimensiunea componentei graduate $M(f)_k$ este constanta pentru $k \geq 2d - 3$.

In continuare se arata ca algebra Milnor asociata unei curbe plane nodale C are acest comportament daca si numai daca toate componentele ireductibile ale lui C sunt rationale.

Pentru curbele Chebyshev, toate aceste componente sunt netede, deci sunt drepte sau conice si se dau factorizari explicite pentru grad arbitrar.

Se obtin margini inferioare fine pentru gradul relatiilor ("syzygies") intre derivatele partiale ale polinomului omogen care defineste hipersuprafata nodala. Rezultatul ne da informatii asupra pozitiei singularitatilor unei hipersuprafete nodale in termeni de defecte sau superabundenta.

Cazul hipersuprafetelor Chebyshev este considerat ca un test pentru aceste rezultate.

Cuvinte cheie

Polinoamele Chebyshev si Fermat, hipersuprafete proiective, singularitati, hipersuprafete nodale, algebre Milnor, rezolutii libere, seria Hilbert-Poincaré.

CUPRINS

1. Introducere si principalele rezultate	2
2. Preliminarii	9
- Proprietatile polinoamelor Chebyshev	9
- Inele, module si algebre graduate	10
- Serii Hilbert Poincare	11
- Numerele Milnor si Tjurina	12
- Teorema Choudary-Dimca	14
3. Curbele Chebyshev si rezolutii libere ale algebrelor Milnor	19
- Constructia unei rezolutii libere	22
4. "Syzygies" pentru hipersuprafetele nodale	29
5. Hipersuprafete Chebyshev	37
6. Legatura cu topologia	40
7. Calcule pentru hipersuprafete singulare	43
- Exemple simple de curbe si suprafete singulare	43
- Curbe singulare de grad mic in $\mathbf{P}^2$	48
- Suprafete singulare de grad mic in $\mathbf{P}^3$	53
- Suprafete nodale in $\mathbf{P}^3$ cu multe noduri	57
- Hipersuprafete nodale de dimensiune mare	60
8. Anexa A: Calcule pentru hipersuprafete Fermat	61
9. Anexa B: Calcule pentru hipersuprafete Chebyshev	65
- Curbe Fermat si Chebyshev in $\mathbf{P}^2$ de grad $d=3 \dots 10$	65
- Suprafete Fermat si Chebyshev in $\mathbf{P}^3$ de grad $d=3 \dots 10$	67
- Hipersuprafete Fermat si Chebyshev in $\mathbf{P}^4$ de grad $d=3 \dots 10$	69
- Hipersuprafete Fermat si Chebyshev in $\mathbf{P}^5$ de grad $d=3 \dots 10$	71
- Hipersuprafete Fermat si Chebyshev in $\mathbf{P}^6$ de grad $d=3 \dots 10$	74
10. Anexa C: Programe in Singular	78
Bibliografie	81

Obiectivul principal al acestei teze este sa investigheze unele obiecte ale Geometriei Algebrice, in principal hipersuprafetele proiective singulare, folosind in principal tehnica algebrei Milnor si a invariantilor asociati. Pentru algebra Milnor, un obiect informational important este seria Hilbert-Poincaré. Pentru aceste serii, vom introduce invarianti algebrici asociati, pentru a intelege si cuantifica diferenta dintre aceste serii, in cazurile hipersuprafetelor singulare (de exemplu Chebyshev) si nesarate (de exemplu Fermat).

Calculul seriilor Hilbert-Poincaré este realizat pentru o multime de polinoame omogene (care definesc curbe, suprafete, hipersuprafete de diverse dimensiuni, in cazul singular si nesarat).

Este natural sa ne intrebam cum depind acesti invarianti algebrici de tipul de singularitate (nodal, cuspidal, etc). Vom observa ca geometria acestora este foarte diferita in cazul singular si nesarat.

Fie $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ inelul polinoamelor cu coeficienti complexi in variabilele $x_0, \dots, x_n$ si notam cu S_r spatiul vectorial al polinoamelor omogene de grad r din S . Pentru orice polinom $f \in S_r$ definim *idealul Jacobian* $J_f \subset S$ ca fiind idealul generat de derivatele partiale $f_0, \dots, f_n$ ale lui f in raport cu $x_0, \dots, x_n$. Pentru $n = 2$ vom scrie x, y, z in loc de x_0, x_1, x_2 si f_x, f_y, f_z in loc de f_0, f_1, f_2 .

Seria Hilbert-Poincaré pentru un S -modul M finit generat este definita astfel:

$$HP(M)(t) = \sum_{k \geq 0} \dim M_k t^k$$

si se cunoaste ca poate fi scrisa in forma rationala:

$$HP(M)(t) = \frac{P(M)(t)}{(1-t)^{n+1}}.$$

Pentru k suficient de mare, $\dim M_k = H(M)(k)$ este polinom in k iar $H(M)$ este numit polinomul Hilbert al lui M .

Pentru orice polinom $f \in S_r$ definim *algebra Milnor* (sau *Jacobiana*) asociata:

$$M = M(f) = S/J_f.$$

Studiul acestei algebre Milnor este legat de singularitatile hipersuprafetei proiective corespondente $D : f = 0$, si este sintetic exprimat de seria Hilbert-Poincaré.

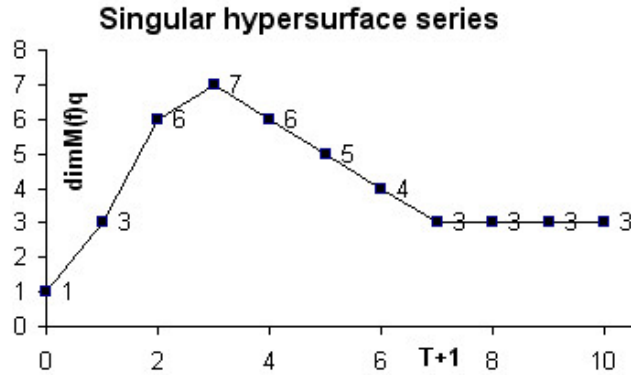
Vom observa ca pentru a determina seria $HP(M)(t)$ este suficient sa determinam polinomul $P(M)(t)$ de la numaratorul fractiei. O modalitate de a intelege complet algebra Milnor $M(f)$ este sa construim o rezolutie libera pentru $M(f)$. Acest lucru este insa dificil in cazul general, cazul pe care-l vom trata complet fiind al curbelor Chebyshev (vezi Capitolul 3).

Aceasta teza are la baza lucrarile noastre [8], [9], [10] si extinde rezultatele din [5]. Obiectivul tezei este sa studieze comportamentul asimptotic dat de teorema Choudary-Dimca [5] pentru a da estimatori mai buni in foarte multe cazuri.

Teorema Choudary-Dimca Fie $V(f) : f = 0$ o hipersuprafata in $\mathbb{P}^n$ numai cu singularitati izolate. Pentru orice $q \geq T + 1, T = (n + 1)(d - 2)$, avem

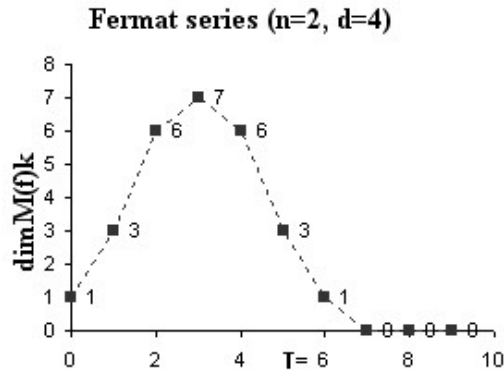
$$\dim M(f)_q = \tau(V(f)) = \sum_{j=1,p} \tau(V(f), a_j)$$

unde $\tau(V(f))$ este numarul Tjurina global (total) pentru hipersuprafata $V(f)$. In particular, polinomul Hilbert $H(M(f))$ este constant si aceasta constanta este $\tau(V(f))$.

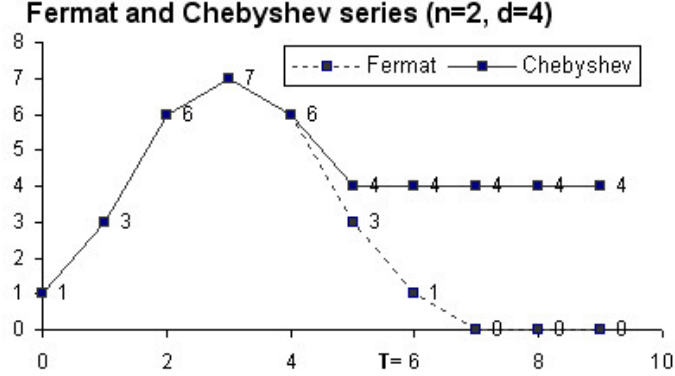


Aceasta teorema da un comportament asimptotic al seriei Hilbert Poincaré $HP(M(f))$ pentru polinoamele f care definesc o hipersuprafata numai cu singularitati izolate in spatiul proiectiv $\mathbb{P}^n$.

Pentru orice hipersuprafata neteda (de exemplu Fermat), constanta este zero iar seria Hilbert-Poincaré este un polinom.



Comportamentul seriei Hilbert-Poincaré pentru diferite hipersuprafete singulare(vezi mai jos cazul Chebyshev) este comparat cu cazul nesingular si aici teorema Choudary-Dimca este esentiala.



Acest exemplu sugereaza ca stabilizarea dimensiunilor $\dim M(f)_q$ apare mai de- vreme decat predictia din teorema Choudary-Dimca.

Pentru o hipersuprafata $D : f = 0$ in $\mathbb{P}^n$ cu singularitati izolate vom introduce **patru** intregi, ca invarianti algebrici asociati seriei Hilbert-Poincaré.

Definitie

(i) *Pragul de coincidenta* $ct(D)$:

$$ct(D) = \max\{q : \dim M(f)_k = \dim M(f_s)_k \text{ pentru } k \leq q\},$$

unde f_s este un polinom omogen in S de grad $d = \deg f$ iar $D_s : f_s = 0$ este o hipersuprafata neteda in $\mathbb{P}^n$.

(ii) *Pragul de stabilitate* $st(D)$:

$$st(D) = \min\{q : \dim M(f)_k = \tau(D) \text{ pentru } k \geq q\}$$

unde $\tau(D)$ este numarul Tjurina total pentru D , adica suma tuturor numerelor Tjurina ale singularitatilor lui D .

(iii) *Gradul minimal al relatiilor "syzygy" netriviale* $mdr(D)$:

$$mdr(D) = \min\{q : H^n(K^*(f))_{q+n} \neq 0\}$$

unde $K^*(f)$ este complexul Koszul pentru $f_0, \dots, f_n$ cu graduarea naturala definita in [9].

(iv) Fie $D_{smooth} : f_{smooth} = 0$ o hipersuprafata neteda de acelasi grad d din $\mathbb{P}^n$. Definim numarul intreg $def(D) = \text{defect}$ pentru D :

$$def(D) = \text{primul coeficient nenul al diferentei } S(t) - F(t)$$

unde $S(t)$ (respectiv $F(t)$) sunt seriile Hilbert-Poincaré corespunzatoare algebrelor Milnor $M(f)$ (respectiv $M(f_{smooth})$).

Reamintim ca pentru o multime finita de puncte $\mathcal{N} \subset \mathbb{P}^n$, notam:

$$def S_m(\mathcal{N}) = |\mathcal{N}| - \text{codim}\{h \in S_m \mid h(a) = 0 \text{ pentru } a \in \mathcal{N}\},$$

defectul (sau superabundenta) sistemului de combinatii liniare ale polinoamelor din S_m care se anuleaza in puncte din $\mathcal{N}$, vezi [6], p. 207. Acest numar natural reprezinta pentru $\mathcal{N}$ esecul impunerii de conditii independente polinoamelor omogene de grad m in [11].

In plus avem:

$ct(D) = mdr(D) + d - 2$ si $S(t) - F(t) = \text{def}(D)t^{ct(D)+1} +$ termeni de ordin superior
cu

$$\text{def}(D) = \text{def } S_{(n+1)(d-2)-ct(D)-1}(\mathcal{N}).$$

Remarcam ca determinarea seriei Hilbert-Poincaré pentru algebra Milnor $M(f)$ cu un software corespunzator este mult mai simpla decat calculul defectelor $\text{def } S_k(\mathcal{N})$, deoarece idealul Jacobian vine cu un set de $(n+1)$ generatori $f_0, \dots, f_n$, in timp ce idealul I al polinoamelor care se anuleaza pe multimea $\mathcal{N}$ nu are dat un astfel de set de generatori. Totusi, aceste defecte $\text{def } S_k(\mathcal{N})$ sunt cele care descriu pozitia singularitatilor pentru D din $\mathbb{P}^n$ si care apar in multe probleme geometrice, oferind informatii despre relatiile ("syzygies") dintre $f_0, \dots, f_n$.

Primul rezultat principal la Capitolul 3 obtine o rezolutie libera pentru algebra Milnor $M(f)$ asociata unei curbe plane $C : f = T_d(x, y, z) = 0$ de grad d . Aceasta rezolutie depinde de paritatea lui d si obtine ca dimensiunile componentelor graduate $M(f)_k$ sunt constante pentru $k \geq 2d - 3$.

Reciproc, aratam ca algebra Milnor pentru o curba nodala plana C are un astfel de comportament daca si numai daca toate componentele ireductibile ale lui C sunt rationale.

Pentru curbele Chebyshev, toate aceste componente sunt netede, prin urmare acestea sunt drepte sau conice. Pentru aceste curbe se obtin factorizari explicite pentru un grad d arbitrar si care depind de paritatea lui d .

Daca hipersuprafata $D : f = 0$ este neteda, atunci derivatele partiale $f_0, \dots, f_n$ formeaza un sir regulat in S si singurele relatii ("syzygies") printre ele sunt doar cele triviale, adica cele din modulul $KR(f)$ definit la inceputul Capitolului 4. Pentru a studia astfel de relatii in general, este convenabil sa se lucreze cu complexul Koszul al derivatelor partiale, selectand relatiile esentiale.

In **Capitolul 4**, discutam in detaliu aceste relatii ("syzygies") in cazul hipersuprafetelor nodale. De exemplu, pentru o curba nodala, aratam ca nu exista relatii netriviale

$$R_m : af_x + bf_y + cf_z = 0$$

cu a, b, c polinoame omogene de grad $m < d - 2$ si descriem numarul de relatii independente, de grad $m = d - 2$, in termeni de factori ireductibili f_j ai lui f .

Se obtin margini inferioare fine pentru gradul relatiilor ("syzygies") intre derivatele partiale ale polinomului omogen care defineste hipersuprafata nodala. Rezultatul ne da informatii asupra pozitiei singularitatilor unei hipersuprafete nodale in termeni de defecte sau superabundenta.

Daca D este o hipersuprafata nodala de grad d din $\mathbb{P}^n$, cu multimea singularitatilor $\mathcal{N}$, atunci:

$$\text{def } S_k(\mathcal{N}) \neq 0 \text{ pentru } k < T - ct(D) \text{ si } \text{def } S_k(\mathcal{N}) = 0 \text{ pentru } k \geq T - ct(D)$$

si

$$\text{def } S_k(\mathcal{N}) = |\mathcal{N}| - \dim S_k \text{ pentru } k \leq T - st(D)$$

unde $T = (n + 1)(d - 2)$.

In **Capitolul 5** consideram cazul special al hipersuprafetelor Chebyshev, care este un exemplu clasic de hipersuprafete nodale cu multe singularitati. Acestea au fost introduse de S. V. Chmutov, vezi [1], volume 2, p. 419 si [4].

Pentru astfel de hipersuprafete calculam numarul de noduri si pragul de stabilitate $st(D)$, aspect dificil in cazul general. Am identificat aici o problema deschisa si am dat o valoare explicita pentru pragul de coincidenta $ct(D)$ in cazul hipersuprafetelor Chebyshev. Aceasta conjectura a fost verificata pentru un numar mare de cazuri, vezi Anexa B.

In **Capitolul 6**, punem in evidenta o surprinzatoare relatie cu invariantii topologici ai hipersuprafetelor singulare proiective si anume relatia intre polinoamele Alexander si invariantii algebrici introdusi de noi pentru algebra Milnor $M(f)$.

Polinoamele Alexander, introduse de A. Libgober [19], [20] pentru hipersuprafetele singulare proiective, sunt invarianti pentru topologia complementului U al hipersuprafetei. Totusi, numarul de exemple de clase de hipersuprafete unde polinoamele Alexander sunt netriviale este destul de limitata, ceea ce explica interesul pentru exemplele noastre (potential un numar infinit de cazuri).

Primul rezultat din acest capitol este cunoscut de multa vreme. Totusi doar in lucrarile recente au devenit clare implicatiile acestei teoreme. Aceasta teorema arata, pe de o parte ca marginile inferioare pentru gradul relatiilor ("syzygies") obtinute pe cazul general sunt optime pentru curve si suprafete Chebyshev de grad ≤ 20 (si probabil pentru orice hipersuprafata Chebyshev de dimensiune impara). Pe de alta parte teorema obtine unele aplicatii topologice, prin calculul polinoamelor Alexander ale hipersuprafetelor Chebyshev de dimensiune 2 si 3 cu grad $d \leq 20$ (si probabil pentru orice grad).

In **Capitolul 7** calculam seria Hilbert-Poincaré si invariantii asociati pentru o serie de hipersuprafete clasice, cu configuratii diferite de singularitati. Multe din rezultatele noastre au fost sugerate de aceste calcule, care se constituie ca o baza de date utila pentru inferente viitoare.

Din cunostiintele noastre, formula generala privind seria Hilbert-Poincaré a algebrei Milnor asociate unei hipersuprafete netede, este urmatoarea:

$$F(t) = HP(M(f_s)) = \frac{(1 - t^{d-1})^{n+1}}{(1 - t)^{n+1}} = (1 + t + t^2 + \dots + t^{d-2})^{n+1}.$$

Putem scrie $F(t)$ in forma: $F(t) = \sum_{k=0}^{k=T} a_k t^k$, unde $T = (d - 2)(n + 1)$.

In **Anexa A**, descriem explicit coeficientii a_k . De asemenea, in legatura cu recenta lucrare a lui Huh [17] obtinem unele secvente log-concave in seriile Fermat si Chebyshev.

In **Anexa B**, prezentam calculele (serii Hilbert-Poincaré si invarianti algebrici) pentru hipersuprafețele Chebyshev in $\mathbb{P}^n$, $n = 2, \dots, 6$, de grad $d = 3, \dots, 10$. Aceste calcule au generat conjecturile din Capitolele 5 si 6.

In **Anexa C** prezentam proceduri scrise de noi in limbajul Singular, pentru calcule rapide si explicite in cazul Fermat si Chebyshev.

In concluzie, **rezultatele noastre originale sunt pe trei directii:**

(A) Studiul seriei Hilbert-Poincaré a algebrei Milnor $M(f)$ pentru hipersuprafețele Chebyshev, cu abordare completa pentru curbe in $\mathbb{P}^2$ prin construirea unei rezolutii libere, si cu unele rezultate pentru spatiul proiectiv $\mathbb{P}^n$, in particular o formula pentru pragul de stabilizare $st(D)$.

(B) Studiul relatiilor liniare ("syzygies") intre derivatele partiale ale polinomului omogen care defineste o hipersuprafata nodala: margini inferioare pentru relatiile esentiale (netriviale) si legatura cu defectele sistemului de combinatii liniare de polinoame care se anuleaza pe aceste noduri.

Aceste margini inferioare sunt optime pentru hipersuprafețe nodale de dimensiune impara, pus in evidenta de hipersuprafețele Chebyshev.

(C) Studiul relatiilor dintre polinomul Alexander al unei hipersuprafețe nodale D si gradul minim al relatiilor esentiale pentru D , in particular relatia cu defectele $def(D)$ definite mai sus.

Majoritatea acestor rezultate au fost deja publicate in urmatoarele articole: [8], [9], [10]:

- A.Dimca and G.Sticlaru, Chebyshev curves, free resolutions and rational curve arrangements, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2012), doi:10.1017/S0305004112000138.
- A.Dimca and G.Sticlaru, Koszul complexes and pole order filtrations, (2011), arXiv:1108.3976.
- A.Dimca and G.Sticlaru, On the syzygies and Alexander polynomials of nodal hypersurfaces, Mathematische Nachrichten (2012), doi:10.1002/201100326.

Utilizarea pachetelor *CAS* (Computer Algebra System) este decisiva pentru obtinerea rezultatelor care implica calcule laborioase si simulari multiple. In teza noastra majoritatea calculelor au fost realizate cu excelentul pachet de programe "Singular", orientat pe analiza singularitatilor, dezvoltat la Universitatea din Kaiserslautern [26]. Pe langa pachetul Singular, alte experiente numerice au fost realizate si cu pachetul *CoCoA* [25].

REFERENCES

- [1] Arnold, V.I., Gusein-Zade, S.M., Varchenko, A.N., Singularities of Differentiable Maps. vols 1/2, Monographs in Math., **82/83**, Birkhäuser, Basel (1985/1988) (document)
- [2] M. Bizzarri, Rational Parameterization of Algebraic Curves, Bachelor Thesis, Pilsen, 2008
- [3] Bruce, J. W.; Wall, C. T. C. (1979), "On the classification of cubic surfaces", The Journal of the London Mathematical Society, 19 (2), 245-256.
- [4] S.V.Chmutov, Examples of projective surfaces with many singularities, J.Algebraic Geom. 1 (1992), 191–196. (document)
- [5] A. D. R. Choudary, A. Dimca, Koszul complexes and hypersurface singularities, Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), 1009-1016. (document)
- [6] A. Dimca, Singularities and Topology of Hypersurfaces, Universitext, Springer-Verlag, 1992. (document)
- [7] A. Dimca, Topics on Real and Complex Singularities, Vieweg Advanced Lecture in Mathematics, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1987, 242+xvii pp.
- [8] A.Dimca and G.Sticlaru, Chebyshev curves, free resolutions and rational curve arrangements, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2012), doi:10.1017/S0305004112000138. (document)
- [9] A.Dimca and G.Sticlaru, Koszul complexes and pole order filtrations, arXiv:1108.3976. (document)
- [10] A.Dimca and G.Sticlaru, On the syzygies and Alexander polynomials of nodal hypersurfaces, arXiv:1111.1533, to appear in Mathematische Nachrichten. (document)
- [11] D. Eisenbud, M. Green, and J. Harris, Cayley-Bacharach theorems and conjectures, Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1996), 295–324. (document)
- [12] D. Eisenbud, The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 229, Springer 2005.
- [13] G.-M. Greuel, G. Pfister, A Singular Introduction to Commutative Algebra (with contributions by O. Bachmann, C. Lossen, and H. Schnemann). Springer-Verlag, 2002 (second edition 2007).
- [14] Ph. Griffith, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry. Wiley, New York (1978)
- [15] Ph. Griffiths, On the period of certain rational integrals I, II, Ann. Math. 90(1969), 460-541.
- [16] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, GTM 52, Springer 1977.
- [17] J. Huh, Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs, J. Amer. Math. Soc. 25 (2012), 907-927. (document)
- [18] P.-V. Koseleff, D. Pecker, F. Rouillier, Computing Chebyshev knots diagrams, arXiv:1001.5192v2.
- [19] A. Libgober, Alexander invariants of plane algebraic curves. Proc. Symp. Pure Math., **40**, Part 2, 135–144 (1983). (document)
- [20] A. Libgober, Homotopy groups of the complements to singular hypersurfaces, II, Annals of Math., 139(1994), 117–144. (document)
- [21] Milnor J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press., 1968.
- [22] Carlos Rito, On the computation of singular plane curves and quartic surfaces arXiv:0906.3480v3, 31 May, 2010.
- [23] R. Kloosterman, Cuspidal plane curves, syzygies and a bound on the MW-rank, arXiv:1107.2043v2.
- [24] Y. Xu, Lagrange interpolation on Chebyshev points of two variables, J. Approx. Theory, 87 (1996), p. 220–238.
- [25] CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra. Available at <http://cocoa.dima.unige.it> (document)
- [26] Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: SINGULAR 3-1-5 — A computer algebra system for polynomial computations.<http://www.singular.uni-kl.de> (2012). (document)
- [27] Wall, C.T.C., Notes on the classification of singularities, Proc. London Math. Soc. 48 (1984) 461-513.
- [28] <http://www.oliverlabs.net>

- [29] <http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/docs/Eflaechen.shtml>
- [30] <http://mathworld.wolfram.com/topics/AlgebraicSurfaces.html>
- [31] <http://www.singsurf.org/parade/Cubics.html>