

**UNIVERSITATEA "OVIDIUS" DIN CONSTANȚA
ȘCOALA DOCTORALĂ DE ȘTIINȚE APLICATE
DOMENIUL DE DOCTORAT MATEMATICĂ**

**TEZĂ DE DOCTORAT
(Rezumat)**

**Conducător de doctorat
Prof.univ.dr. MIRELA ȘTEFĂNESCU**

**Student-doctorand
AHMET DOKUYUCU**

CONSTANȚA 2014

IDEALE BINOMIALE ASOCIATE GRAFURILOR

Cuprins

Prefață	i
Capitolul 1. Preliminarii	1
1.1. Baze Gröbner	1
1.1.1. Ideale monomiale. Proprietăți de bază	1
1.1.1.1. Operații algebrice standard în cadrul idealelor monomiale	2
1.1.2. Aspecte introductive ale teoriei bazelor Gröbner	4
1.1.2.1. Ordonare monomială	4
1.1.2.2. Ideale inițiale și baze Gröbner	6
1.2. Rezoluții libere graduate minimale de idealuri graduate	11
1.3. Un scurt rezumat despre descompunerea primară	14
1.4. Ideale binomiale muchie	16
1.4.1. Ideale binomiale muchie cu baze Gröbner pătratice	17
1.4.1.1. Idealul binomial muchie al unui graf complet	19
1.4.1.2. Idealul binomial muchie al unui graf liniar	20
1.4.2. Baze Gröbner pentru ideale binomiale muchie	21
1.4.3. Descompunere primară de ideale binomiale muchie	23
1.4.4. Rezoluțiile libere graduate minimale ale anumitor ideale binomiale muchie	25
Capitolul 2. Numere Betti extremale pentru unele clase de ideale muchie binomiale	27
2.1. Ideale muchie binomiale asociate grafurilor bipartite complete	28
2.2. Ideale muchie binomiale asociate ciclurilor	28
2.3. Numere Betti extremale pentru grafurile bipartite	29
2.4. Numere Betti extremale asociate ciclurilor	30

Capitolul 3. Asupra idealelor binomiale muchie asociate grafurilor bloc	33
3.1. Ideale inițiale pentru ideale muchie binomiale asociate grafurilor bloc	34
3.2. Ideale muchie binomiale asociate arborilor 'caterpillar'	36
Capitolul 4. Idealele binomiale muchie și scrol normal rațional	39
4.1. Baze Gröbner	41
4.2. Proprietăți ale idealelor muchie binomiale scrol asociate grafurilor închise	41
4.2.1. Ideale prime asociate grafurilor	42
4.2.2. Regularitate	42
Concluzii și dezvoltări ulterioare	45
Bibliografie	47

Scopul principal al lucrării de față este reprezentat de studiul idealelor binomiale în inele de polinoame ce provin din combinatorică.

Printr-un graf simplu G definit pe mulțimea de vârfuri $[n]$ vom înțelege un graf neorientat G fără bucle și fără muchii multiple. Villareal [30] a introdus noțiunea de ideale monomiale muchie $I(G)$ asociate cu graful simplu G în inelul de polinoame $K[x_1, \dots, x_n]$ în n variabile peste corpul K . Idealul monomial muchie $I(G)$ este generat de toate monoamele $x_i x_j$ unde $i < j$, iar $\{i, j\}$ este o muchie a lui G . Într-un mod similar, se poate defini idealul binomial muchie $J_G \subset S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ asociat grafului G drept idealul generat de toate binoamele $f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$, unde $i < j$, iar $\{i, j\}$ este o muchie a grafului G .

Idealele binomiale muchie au fost introduse pentru prima dată în [19] și [22] (independent și în același timp). Autorii din [19] au obținut o serie de rezultate interesante privind bazele Gröbner, descompunerea primară și idealele prime minimale ale idealelor binomiale muchie. În continuare, multe alte lucrări de cercetare au abordat subiectul idealelor binomiale muchie. Un efort deosebit a fost realizat în studiul proprietății Cohen-Macaulay a idealelor binomiale muchie J_G [14, 23, 31], relațiile syzygies pentru J_G împreună cu regularitatea sa [20, 25, 27, 16, 29, 32]. Importanța studiului idealelor binomiale muchie se datorează faptului că acestea au anumite aplicații în algebra statistică [19, 13, 24, 28].

În cadrul acestei lucrări vom avea două direcții importante. Prima constă în descrierea proprietăților omologice ale unor clase de ideale binomiale muchie, anume cele asociate cu grafuri complete bipartite, cicluri și grafuri de tip bloc. A doua direcție se ocupă cu studiul unei clase de ideale binomiale asociate cu scrolls. Lucrarea de față va fi constituită, în

principal, din rezultatele originale obținute în cadrul lucrărilor [9], [7] și [8].

În continuare, vom prezenta structura acestei lucrări.

În Capitolul 1 vom prezenta noțiunile și rezultatele fundamentale necesare înțelegerii depline a acestei lucrări. Vom urmări în principal următoarele cărți [11, 13, 18]. Vom aminti o serie de definiții de bază și noțiuni bine cunoscute despre ideale monomiale împreună cu o serie de concepte cum ar fi rezoluția minimală liberă și descompunerea primară. Vom prezenta o scurtă introducere a caracteristicilor importante ale teoriei bazelor Gröbner, inclusiv criteriul și algoritmul Buchberger.

În partea a doua a acestui capitol, vom urmări proprietățile importante ale idealelor muchie binomiale, care vor reprezenta problematica principală a acestei lucrări, și vom considera o serie de exemple de ideale binomiale asociate cu grafuri liniare și grafuri complete. Această parte este în principal bazată pe lucrarea fundamentală [19] în care s-au introdus idealele muchie binomiale. Vom studia grafuri G din care generatorii vor forma baze Gröbner ordonate lexicografic odată ce avem o etichetare dată a vârfurilor lui G și vom prezenta o metodă din combinatorică pentru identificarea bazei Gröbner reduse a oricărui ideal muchie binomială. Într-un final, vom aminti cum idealul prim minimal al lui J_G poate fi obținut din anumite submulțimi ale vârfurilor lui G .

Capitolul 2 este bazat pe lucrarea proprie [9]. În acest capitol, sunt studiate numerele Betti extremale ale unor clase de ideale binomiale muchie. Vom demonstra că idealul binomial muchie J_G împreună cu idealul sau inițial $\text{in}_<(J_G)$ relativ la ordinea lexicografică au aceleași numere Betti extremale pentru grafuri complete bipartite, și cicluri. Aceasta este un răspuns pozitiv parțial pentru conjectura propusă în [14] care spune că, pentru orice graf G , J_G și $\text{in}_<(J_G)$ au aceleași numere Betti extremale. Vom utiliza avantajele date de anumite rezultate cunoscute despre rezoluția lui J_G date în [29] și [32]. În primul rând, vom găsi mulțimea de generatori minimală pentru idealele inițiale pentru aceste grafuri, folosind teorema 1.4.11, care caracterizează în termeni de drumuri admisibile, baza Gröbner redusă a lui J_G relativă la ordinea lexicografică în inelul S . Propoziția 2.3.1 arată că $\text{in}_<(J_G)$ are coeficienți lineari dacă G este un graf complet bipartit. Pentru ideale monomiale cu coeficienți lineari, se poate calcula ușor, numerele Betti. Așadar, vom putea calcula toate numerele Betti graduate ale lui $\text{in}_<(J_G)$ pentru graful complet bipartit; vezi teorema 2.3.2. În continuare vom arăta că $\text{proj dim in}_<(J_G) = \text{proj dim } J_G$ și $\text{reg in}_<(J_G) = \text{reg } J_G$, și, prin urmare, $\text{in}_<(J_G)$ au un număr Betti extremal unic, precum și J_G . Într-un final, vom arăta că numerele Betti extremale ale lui $\text{in}_<(J_G)$ sunt egale cu cele ale lui J_G ; În timp ce, pentru grafuri complete bipartite, ca

săajungem la această concluzie nu a fost foarte dificil, pentru cicluri avem nevoie de o tehnică puțin mai avansată. Pasul inițial, similar pentru cazul grafurilor complete bipartite, constă în identificarea generatorilor minimali monomiali ai lui $\text{in}_<(J_G)$ unde G este un n -ciclu dotat cu o etichetare naturală a vârfurilor sale. În aceasta situație, vom folosi un argument inductiv (lema 2.4.1 și lema 2.4.3) pentru a calcula dimensiunea proiectivă și regularitatea lui $\text{in}_<(J_G)$. Într-un final, în teorema 2.4.6, vom arăta că J_G și $\text{in}_<(J_G)$ au aceleași numere Betti extreme.

În Capitolul 3, vom studia idealele binomiale muchie a grafurilor de tip bloc. Acest capitol se bazează pe lucrarea realizată în colaborare [8]. Printr-un graf de tip bloc G vom înțelege un graf cordal având proprietățile că este cordal și că orice două cliци maximale se intersectează în maxim un varf. În ajutorul conjecturii din [14], vom demonstra, în teorema 3.1.2, că, pentru un graf de tip bloc G , $\text{depth}(S/J_G) = \text{depth}(S/\text{in}_<(J_G)) = n + c$, unde c este numărul componentelor conexe ale lui G . Vom demonstra o egalitate similară pentru regularitate, anume $\text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_<(J_G)) = \ell$ dacă G este un C_ℓ -graf unde ℓ reprezintă lungimea celui mai lung drum indus al lui G . C_ℓ -grafuri constituie o subclasă a grafurilor de tip bloc. În [20], Matsuda și Murai demonstrează că, pentru orice graf conex G , avem că $\ell \leq \text{reg}(S/J_G) \leq n - 1$. Așadar, vom concluziona prin faptul că C_ℓ -grafuri au regularitate minimală.

Scopul principal al acestei lucrări este de a da un răspuns la următoarea întrebare. Putem caracteriza grafurile conexe G ale căror drumuri maximale induse au lungimea ℓ , iar $\text{reg}(S/J_G) = \ell$? Cu alte cuvinte, putem caracteriza grafurile ale caror ideale minimale au regularitate minimală? Am reușit să răspundem la această întrebare, parțial, pentru arbori. Demonstrăm că, dacă T este un arbore, a cărui drum maximal indus are lungimea ℓ , atunci $\text{reg}(S/J_T) = \ell$ dacă și numai dacă T este 'caterpillar'; vezi teorema 3.2.1.

În [21], aș sunt introduse grafurile slab închise. Acestea formează o clasă de grafuri ce cuprind grafurile închise. În aceeași lucrare este demonstrat că un arbore este 'caterpillar' dacă și numai dacă este un graf slab închis. Având în vedere teorema 3.2.1 și [16, Theorem 3.2] care spun că $\text{reg}(S/J_G) = \ell$ dacă G este un graf conex închis a cărui drum maximal indus are lungimea ℓ , împreună cu o serie de experimente realizate pe calculator, suntem tentați să formulăm următoarea afirmație.

Conjectură. *Dacă G este un graf conex slab închis a cărui drum maximal indus are lungimea ℓ , atunci $\text{reg}(S/J_G) = \ell$.*

În Capitolul 4, bazându-ne pe lucrarea noastră colaborativă [7], ca o analogie adusă idealele binomiale muchie J_G generate de minori de ordin

2 $f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ ai matricei

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix},$$

unde $i < j$ iar $\{i, j\}$ este o muchie a lui G , vom introduce idealul binomial muchie asociat cu matricea $2 \times n$ Hankel

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Este cunoscut faptul că totii minorii de ordin 2 ai matricei Hankel generează idealul I_X al curbei normale raționale $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$.

În secțiunea 4.1, vom arăta că generatorii lui I_G formează o bază Gröbner relativă la ordinea invers lexicografică dacă și numai dacă G este închis la etichetarea dată. Ca o consecință a acestei teoreme, vom obține că pentru un graf închis G , idealul I_G este Cohen-Macaulay de dimensiune $1 + c$, unde c reprezintă numărul componentelor conexe ale lui G .

În secțiunea 4.2, vom studia proprietățile lui I_G ale unui graf închis G . Vom calcula idealele prime minimale ale lui I_G în teorema 4.2.2 pentru un graf închis conex G . Folosind această teoremă, vom caracteriza acele grafuri închise conexe G pentru care I_G este un ideal radical. Mai mult, vom arăta că I_G este o intersecție completă 'set-theoretic', dacă G este conex și închis. Vom concluziona prin a da o margine superioară puternică pentru regularitatea lui I_G și demonstrând că I_G are o rezoluție lineară dacă și numai dacă G este un graf complet.

CHAPTER 1

Preliminarii

În acest capitol vom aminti o serie de noțiuni și rezultate fundamentale, care vor fi folosite pe tot parcursul lucrării.

1.1. Baze Gröbner

1.1.1. Ideale monomiale. Proprietăți de bază. Fie K un corp, și fie $S = K[x_1, \dots, x_n]$ inelul polinoamelor în n variabile cu coeficienți din K . Notăm prin $\mathbb{Z}_+^n$ mulțimea tuturor vectorilor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $a_i \geq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Vom folosi notația standard pentru a desemna mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$.

Un element din S de forma $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ se numește monom. Putem reprezenta un monom u prin $u = x^a$, unde $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Fie $\text{Mon}(S)$ mulțimea tuturor monoamelor din S . Orice polinom f în S poate fi reprezentat unic ca o K -combinație liniară de monoame din $\text{Mon}(S)$

$$f = \sum_{u \in \text{Mon}(S)} a_u u, \text{ unde } a_u \in K.$$

Vom defini mulțimea $\text{supp}(f) = \{u \in \text{Mon}(S) : a_u \neq 0\}$ ca fiind *suportul* lui f .

Dacă $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ este un monom în S , vom defini *gradul* lui u astfel $\deg(u) = a_1 + \cdots + a_n$. Dacă $f \in S \setminus \{0\}$ este un polinom, gradul lui f este $\deg f = \max\{\deg u : u \in \text{supp}(f)\}$.

Inelul S are o $\mathbb{N}$ -gradare dată de $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$ unde S_d este K -subspațiul vectorial al lui S generat de toate monoamele de grad d . Un element nenul din S_d este numit *polinom omogen* de grad d .

Un *ideal monomial* $I \subset S$ este un ideal generat de o mulțime de monoame. Conform cu lema lui Dickson [13, Theorem 1.3], știm că orice ideal monomial poate fi generat de o mulțime finită de monoame. Următoarea teorema prezintă o proprietate importantă a idealelor monomiale.

TEOREMA 1.1.1. [13] *Fie I un ideal monomial. Mulțimea $\mathcal{M}$ de monoame aparținând lui I este o K -bază a lui I .*

COROLAR 1.1.2. [13] *Fie $I \subset S$ un ideal. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) I este ideal monomial.
- (ii) Pentru orice polinom $f \in S$ avem că $f \in I$ dacă și numai dacă $\text{supp}(f) \subset I$.

COROLAR 1.1.3. [13] *Fie $I \subset S$ un ideal monomial. Clasele reziduu ale monoamelor ce nu aparțin de I formează o K -bază a inelului S/I .*

EXEMPLU 1.1.4. Fie $I = (x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}) \subset S$. Atunci o K -bază a lui S/I este dată de clasele reziduu ale tuturor monoamelor $w = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \in S$ care satisfac proprietatea că $b_i < a_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$. Așadar, obținem că $\dim_K(S/I) = a_1 \cdots a_n$.

PROPOZIȚIE 1.1.5. [13] *Fie mulțimea de monoame $\{u_1, \dots, u_m\}$ care generează idealul monomial I . Atunci monomul v aparține de I dacă și numai dacă există un monom w astfel încât $v = wu_i$ pentru niște i .*

PROPOZIȚIE 1.1.6. [13] *Fie $I \subset S$ un ideal monomial și fie $G(I)$ mulțimea monoamelor din I care sunt minimale relativ la divizibilitate. Atunci $G(I)$ este mulțimea minimală unică de monoame generatoare a lui I .*

Evident, inelul de polinoame S este $\mathbb{Z}^n$ -graduat cu componente graduate

$$S_a = \begin{cases} Kx^a, & \text{dacă } a \in \mathbb{Z}_+^n, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Fie $f = cx^a \in S$ cu $c \in K$ și $a \in \mathbb{Z}^n$. Atunci f este numit omogen de grad a .

Observăm că orice ideal monomial $I \subset S$ este un submodul $\mathbb{Z}^n$ -graduat a lui S . În acest caz, câțul S/I este de asemenea $\mathbb{Z}^n$ -graduat. Cu alte cuvinte,

$$I = \bigoplus_{x^a \in I} S_a \text{ și } S/I = \bigoplus_{x^a \notin I} S_a.$$

1.1.1.1. Operații algebrice standard în cadrul idealelor monomiale. Fie I și J două ideale ale lui S . Suma și produsul acestor două ideale se definește după cum urmează:

$$I + J = \{f + g : f \in I, g \in J\} \text{ și } IJ = (G), \text{ unde } G = \{fg : f \in I, g \in J\}.$$

Evident, $I + J$ și IJ sunt ele însăși ideale monomiale dacă I și J sunt ideale monomiale. Mai mult, $G(I + J) \subset G(I) \cup G(J)$ și $G(IJ) \subset G(I)G(J)$.

Intersecția a două ideale monomiale I și J este tot un ideal monomial, definit prin

$$I \cap J = (\{\text{lcm}(u, w) : u \in G(I), w \in G(J)\}).$$

Idealul cât a două ideale monomiale este tot un ideal monomial, fiind definit astfel

$$I : J = \bigcap_{w \in G(J)} I : (w),$$

unde

$$I : (w) = (\{u / \gcd(u, w) : u \in G(I)\}).$$

Radicalul unui ideal monomial I este un ideal dat de

$$\sqrt{I} = (\sqrt{u} : u \in G(I)),$$

unde, pentru $u = x^a$, $\sqrt{u} = \prod_{i=1, a_i \neq 0}^n x_i$. Spre exemplu, dacă $u = x_1^3 x_2 x_4^2$, atunci

$$\sqrt{u} = x_1 x_2 x_4.$$

I este numit un ideal radical dacă $\sqrt{I} = I$. Observăm că un ideal monomial I este un radical ideal dacă și numai dacă I este un ideal de monoame libere de pătrate, i.e. monoamele generatoare minimale sunt monoame libere de pătrate.

EXEMPLU 1.1.7. Fie $I = (x^3, x^2y, y^3)$ și $J = (xy, y^2)$ două ideale monomiale ale inelului de polinoame $S = K[x, y]$. Atunci

$$I + J = (x^3, x^2y, y^3) + (xy, y^2) = (x^3, x^2y, y^3, xy, y^2) = (x^3, xy, y^2).$$

Deoarece xy divide x^2y și y^2 divide y^3 , putem elimina generatorii x^2y și y^3 . Produsul idealelor I și J este

$$IJ = (x^3, x^2y, y^3)(xy, y^2) = (x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5),$$

iar intersecția lor este

$$\begin{aligned} I \cap J &= (\text{lcm}(x^3, xy), \text{lcm}(x^3, y^2), \text{lcm}(x^2y, xy), \dots, \text{lcm}(y^3, y^2)) \\ &= (x^3y, x^3y^2, x^2y, x^2y^2, xy^3, y^3) \\ &= (x^2y, y^3). \end{aligned}$$

Câtul celor două ideale este

$$\begin{aligned}
 I : J &= (x^3 / \gcd(x^3, xy), x^2y / \gcd(x^2y, xy), y^3 / \gcd(y^3, xy)) \\
 &\quad \cap (x^3 / \gcd(x^3, y^2), x^2y / \gcd(x^2y, y^2), y^3 / \gcd(y^3, y^2)) \\
 &= (x^2, x, y^2) \cap (x^3, x^2, y) \\
 &= (x, y^2) \cap (x^2, y) \\
 &= (x^2, xy, y^2).
 \end{aligned}$$

1.1.2. Aspecte introductive ale teoriei bazelor Gröbner. În algebra de polinoame $K[x]$ într-o singură variabilă peste un corp K , vom folosi teorema împărțirii cu rest pentru două polinoame $f, g \in K[x]$ cu $g \neq 0$: Există două polinoame unic determinate q și r din $K[x]$ astfel încât $f = qg + r$, unde $\deg r < \deg g$.

Algoritmul de calcul al polinoamelor q și r este următorul: Dacă $\deg f < \deg g$ atunci $q = 0$ și $r = f$. Dacă $\deg f \geq \deg g$, vom calcula $r_1 = f - (a/b)x^{n-m}$, unde ax^n și bx^m sunt termenii dominanți ai lui f și respectiv g . Dacă $\deg r_1 < \deg g$, atunci $q = (a/b)x^{n-m}$ și $r = r_1$. Altfel, vom aplica aceeași reducere și lui r_1 . Algoritmul se va finaliza într-un număr finit de pași.

Teoria bazelor Gröbner se bazează pe o generalizare a acestui algoritm, la algebre de polinoame în mai multe variabile. În acest caz, identificăm o problemă în identificarea termenilor dominanți și compararea monoamelor ce conțin mai mult de o singură variabilă. Pentru a remedia această problemă, vom introduce noțiunea de ordonare monomială.

1.1.2.1. Ordonare monomială. Vom numi cuplul $(X, \leq)$ ca fiind parțial ordonat dacă X este o mulțime și $\leq$ este o relație binară pe X reflexivă, antisimetrică și tranzitivă, i.e. pentru orice a, b , și c din X avem:

- (i) $a \in X \Rightarrow a \leq a$;
- (ii) $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$;
- (iii) $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Vom scrie $a < b$, înțelegând $a \leq b$ și $a \neq b$. De asemenea, $a \geq b$ va reprezenta $b \leq a$.

EXEMPLU 1.1.8.

- (1) Mulțimea tuturor submulțimilor lui X , mulțimea părților lui X , notată prin $\mathcal{P}(X)$. Relația de incluziune $\subseteq$ este o relație de ordine parțială pe $\mathcal{P}(X)$.
- (2) Definim relația binară $|$ pe monoamele din $\text{Mon}(S)$ după cum urmează:

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} | x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \quad \text{dacă} \quad a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n.$$

În acest caz, putem spune că $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ divide $x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$. Putem verifica ușor faptul că $(\text{Mon}(S), |)$ este un 'poset'.

O relație de ordine parțială $\leq$ definită pe X se numește relație de *ordine totală*, dacă pentru orice două elemente $a, b \in X$ avem că $a \leq b$ sau $a \geq b$. Cu alte cuvinte, orice pereche de elemente din X pot fi comparate relativ la relația dată de $\leq$.

Definim, în continuare, o relație de ordine totală peste mulțimea tuturor monoamelor din $S = K[x_1, \dots, x_n]$ care respectă structura multiplicativă a lui $\text{Mon}(S)$.

DEFINIȚIE 1.1.9. O relație de *ordine monomială* peste S este o relație de ordine totală $\leq$ peste $\text{Mon}(S)$ dacă sunt satisfăcute condițiile:

- (i) $1 \leq u$, pentru orice $u \in \text{Mon}(S)$;
- (ii) dacă $u \leq v$, atunci pentru orice $w \in \text{Mon}(S)$, $uw \leq vw$.

Subliniem faptul că orice două monoame pot fi comparate relativ la o relație de ordine monomială. Următoarele afirmații sunt satisfăcute de orice relație de ordine monomială.

PROPOZIȚIE 1.1.10. [13] Fie $\leq$ o relație de ordine monomială peste S . Atunci, au loc următoarele afirmații:

- (i) dacă $u, v \in \text{Mon}(S)$ astfel încât $u|v$, atunci $u \leq v$;
- (ii) dacă $u_1, u_2, \dots$ este un șir de monoame cu $u_1 \geq u_2 \geq \dots$ atunci există un număr întreg m astfel încât $u_i = u_m$ pentru orice $i \geq m$.

Vom prezenta în continuare o serie de relații de ordine monomială standard peste S . În aceste exemple vom desemna ordinea variabilelor într-un mod standard, astfel: $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Fie x^a și x^b două monoame peste S .

- **Ordinea lexicografică:** Avem $x^a < x^b$, dacă fie $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i$ fie $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ și componenta nenulă, cea mai din stânga a vectorului $a - b$ este negativă. În aceasta ordonare vom compara mai întâi gradele totale, și apoi puterile variabilelor pornind cu variabila de index minim.

EXEMPLU 1.1.11. $x_1^2 x_2 x_4^2 x_5^3 < x_1^2 x_2 x_4^4 x_5$, deoarece cele două monoame au același grad și avem că $a - b = (0, 0, 0, -2, 2)$.

- **Ordinea lexicografică pură:** Avem $x^a < x^b$ dacă componenta cea mai din stânga a vectorului $a - b$ este negativă. În aceasta relație de ordine totală, gradul total nu este relevant.

EXEMPLU 1.1.12. $x_1^3 x_2 x_4^5 < x_1^3 x_2 x_3$, deoarece avem $a - b = (0, 0, -1, 5)$.

- *Ordinea lexicografică inversa*: Avem că $x^a < x^b$ dacă fie $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i$ fie $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ și componenta nenulă cea mai din dreapta a vectorului $a - b$ este pozitivă.

EXEMPLU 1.1.13. $x_1^2 x_3 x_4 < x_1 x_2^2 x_4$, deoarece $a - b = (1, -2, 1, 0)$.

Diferența dintre ordinea lexicografică și ordinea invers lexicografică poate fi explicitată în modul următor. Fie $x^a, x^b \in \text{Mon}(S)$ două monoame de același grad. Dacă $x^a < x^b$ în ordinea lexicografică, atunci x^b are gradele componentelor mai mare de la început spre sfârșit decât gradele componentelor lui x^a . Dacă $x^a < x^b$ în ordinea invers lexicografică, atunci x^b are gradele componentelor mai mic de la sfârșit spre început decât gradele componentelor lui x^a .

EXEMPLU 1.1.14. Considerăm toate monoamele din $S = K[x_1, x_2, x_3]$ de grad 2. În ordine lexicografică avem: $x_1^2 > x_1 x_2 > x_1 x_3 > x_2^2 > x_2 x_3 > x_3^2$, iar în ordine invers lexicografică avem: $x_1^2 > x_1 x_2 > x_2^2 > x_1 x_3 > x_2 x_3 > x_3^2$.

1.1.2.2. *Ideale inițiale și baze Gröbner*. Fie $<$ o relație de ordine monomială fixată definită pe inelul de polinoame $S = K[x_1, \dots, x_n]$ peste corpul K . Pentru un polinom nenul $f \in S$ monomul inițial al lui f relativ la relația $<$ este cel mai mare monom dintre monoamele conținute de $\text{supp}(f)$. Monomul inițial, relativ la relația $<$, al lui f este notat prin $\text{in}_<(f)$. Coeficientul dominant $c \in K$ al lui f este coeficientul $\text{in}_<(f)$, iar termenul dominant al lui f este $\text{cin}_<(f)$.

EXEMPLU 1.1.15. Fie $f = 5x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^4 + 3x_1^4 x_3$. Dacă $<$ reprezintă ordinea lexicografică, atunci $\text{in}_<(f) = x_1^3 x_2^2 x_3$; dacă $<$ reprezintă ordinea invers lexicografică, atunci $\text{in}_<(f) = x_1^2 x_2^4$, și dacă $<$ reprezintă ordinea pur lexicografică, atunci $\text{in}_<(f) = x_1^4 x_3$.

Monoamele inițiale ale sumei și produsului a două polinoame este dată de următoarea leamnă:

LEMA 1.1.16. [13] Fie f și g două polinoame nenule și fie relația de ordine monomială $<$ peste S . Atunci

- $\text{in}_<(fg) = \text{in}_<(f) \text{in}_<(g)$;
- $\text{in}_<(f+g) \leq \max\{\text{in}_<(f), \text{in}_<(g)\}$. Egalitatea are loc dacă $\text{in}_<(f) \neq \text{in}_<(g)$.

Fie $I \subset S$ un ideal nenul. Idealul inițial al lui I este un ideal monomial generat de toate monoamele inițiale nenule ale polinoamelor din I . Idealul inițial al lui I relativ la ordinea monomială $<$ este notată prin $\text{in}_<(I)$. Așadar, $\text{in}_<(I) = (\text{in}_<(f) : f \in I, f \neq 0)$.

Observăm că $\text{in}_<(I) = (0)$, dacă $I = (0)$. În general, monoamele inițiale ale elementelor unei mulțimi generatoare, nu vor genera $\text{in}_<(I)$. Spre exemplu, considerăm idealul $I = (x_1^2 - x_1x_2 + x_2, x_1 - x_2)$ împreună cu ordinea lexicografică pură în inelul de polinoame $K[x_1, x_2]$. Avem că $(x_1^2 - x_1x_2 + x_2) - x_1(x_1 - x_2) = x_2 \in I$. Dacă presupunem că $\text{in}_<(I) = (x_1^2, x_1) = (x_1)$, atunci ar trebui să avem că $x_2 \in \text{in}_<(I)$, deși $x_2 \notin (x_1)$.

Conform propoziției 1.1.6, un ideal monomial are o mulțime minimală unică de generatori monomiali. Lema lui Dickson ne spune că mulțimea minimală de generatori este o mulțime finită. Prin urmare orice ideal monomial este finit generat. Cum $\text{in}_<(I)$ este un ideal monomial, atunci există $g_1, \dots, g_m \in I$ astfel încât $\text{in}_<(I) = (\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_m))$.

DEFINIȚIE 1.1.17. Fie $I \subset S$ un ideal nenul și fie relația $<$ o relație de ordine monomială peste S . O mulțime de polinoame $\{g_1, \dots, g_m\}$ se numește *bază Gröbner* a lui I relativ la relația de ordine $<$ dacă $\text{in}_<(I) = (\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_m))$.

Conform cu definiția, pentru orice ideal monomial nenul întotdeauna există o bază Gröbner.

EXEMPLU 1.1.18. Mulțimea $G = (x_1^2 - x_1x_2 + x_2, x_1 - x_2)$ nu este o bază Gröbner pentru $I = (G)$ relativ la relația de ordine pur lexicografică, deoarece, așa cum am explicat anterior, $x_2 \in I$. În pofida acestui lucru $x_2 \notin (x_1^2, x_1) = (x_1)$.

TEOREMA 1.1.19. [13] Fie I un ideal al lui S și fie mulțimea $\{g_1, \dots, g_m\}$ o bază Gröbner al lui I relativ la relația de ordine monomială $<$. Atunci, $I = (g_1, \dots, g_m)$. Cu alte cuvinte, fiecare bază Gröbner al lui I este o mulțime de generatori pentru I .

COROLAR 1.1.20 (Teorema bazelor a lui Hilbert). **[13]** Fiecare ideal în inelul de polinoame $S = K[x_1, \dots, x_n]$ este finit generat. Cu alte cuvinte, inelul S este Noetherian.

TEOREMA 1.1.21 (Algoritmul de impartire). **[13]** Fie f și $g_1, \dots, g_m$ polinoame nenule din S și fie $<$ o relație de ordine monomială. Atunci, există două polinoame r și $q_1, \dots, q_m$ în S cu $f = q_1g_1 + \dots + q_mg_m + r$ astfel încât următoarele condiții să fie satisfăcute:

- (i) nici-un element din $\text{supp}(r)$ nu este conținut în $(\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_m))$;
- (ii) $\text{in}_<(f) \geq \text{in}_<(q_i g_i)$ pentru orice i .

Expresia $q_1g_1 + \dots + q_mg_m + r$ care satisface condițiile de mai sus este numită *expresie standard* al lui f . Polinomul r este restul lui f relativ la $g_1, \dots, g_m$. Următorul exemplu arată că expresia standard a lui f nu este unică.

EXEMPLU 1.1.22. Polinomul $f = x_1^2 - x_2^3$ are două expresii standard distincte relative la $g_1 = x_1 + x_2$ și $g_2 = x_1 + x_2^2$. Considerăm ordinea lexicografică pură. Avem $f = x_1g_1 - x_2g_2$ și $f = (x_1 - x_2)g_1 + x_2^2 - x_2^3$. În aceste expresii standard avem resturi diferite: 0 și $x_2^2 - x_2^3$.

Dacă f are un rest nul relativ la polinoamele $g_1, \dots, g_m$, vom spune că f se reduce la 0 relativ la $g_1, \dots, g_m$.

În continuare vom descrie un algoritm de găsim a unei expresii standard pentru f relativă la o mulțime ordonată de polinoame $g_1, \dots, g_m$. În acest algoritm obținem un șir finit de polinoame $h_i, 1 \leq i \leq s$, astfel:

Fie $h_0 = f$. Presupunem că deja am definit polinoamele $h_1, \dots, h_i$. Șirul se termină cu h_i dacă polinomul h_i satisface următoarea condiție $\text{supp}(h_i) \notin (\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_m))$.

Altfel, fie u cel mai mare monom din $\text{supp}(h_i)$ care aparține lui $(\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_m))$ și fie j cel mai mic număr întreg astfel încât $(\text{in}_<(g_j) \mid u)$.

Definim $h_{i+1} = h_i - ab^{-1}wg_j$, unde $w = u/\text{in}_<(g_j)$ iar a și b sunt coeficienți dominanți ai lui h_i și respectiv g_j . Presupunem că șirul de h_i -uri se termină în h_s . Atunci, obținem următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f = h_0 = q'_1g_{j_1} + h_1 \\ (2) \quad & h_1 = q'_2g_{j_2} + h_2 \\ (3) \quad & h_2 = q'_3g_{j_3} + h_3 \\ & \vdots \\ (4) \quad & h_{s-1} = q'_sg_{j_s} + h_s \end{aligned}$$

Înlocuind h_1 în (1) cu (2), obținem $f = q'_1g_{j_1} + q'_2g_{j_2} + h_2$. În această expresie nouă, în loc de h_2 scriem expresia (3). Repetând procesul, obținem o expresie standard pentru f cu restul $r = h_s$.

EXEMPLU 1.1.23. Fie $f = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 3x_2^3$. Vom calcula o expresie standard pentru f relativă la $g_1 = x_1 - x_2$ și $g_2 = x_2$ folosind algoritmul descris mai sus, utilizând ordinea lexicografică.

$$\begin{aligned} f = h_0 &= x_1x_2g_1 + 2x_1x_2^2 - 3x_2^3 && \text{unde } h_1 = 2x_1x_2^2 - 3x_2^3 \\ h_1 &= 2x_2^2g_1 - x_2^3 && \text{unde } h_2 = -x_2^3 \\ h_2 &= -x_2^2g_2 && \text{unde } h_3 = 0. \end{aligned}$$

Prin urmare expresia standard este $f = (x_1x_2 + 2x_2^2)g_1 - x_2^2g_2$. f are restul 0 relativ la $x_1 - x_2$ și x_2 .

PROPOZIȚIE 1.1.24. [13] Fie $<$ o relație de ordine monomială peste S și fie mulțimea $\{g_1, \dots, g_m\}$ o bază Gröbner pentru idealul $I = (g_1, \dots, g_m)$. Atunci, orice polinom nenul f din S are un rest unic relativ la $g_1, \dots, g_m$.

COROLAR 1.1.25. [13] Fie mulțimea $\{g_1, \dots, g_m\}$ o bază Gröbner pentru idealul $I = (g_1, \dots, g_m)$. Atunci, orice polinom f în S care aparține lui I , are restul zero relativ la $g_1, \dots, g_m$.

În continuare vom prezenta un algoritm care ne permite să construim o bază Gröbner a unui ideal pornind de la orice mulțime dată de generatori. Vom avea nevoie de următoarea definiție.

DEFINIȚIE 1.1.26. Fie f și g două polinoame din S și fie $<$ o relație de ordine monomială. Polinomul

$$S(f, g) = \frac{\text{lcm}(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g))}{\text{cin}_<(f)} f - \frac{\text{lcm}(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g))}{\text{din}_<(g)} g$$

este numit *S-polinomul* lui f și g relativ la relația $<$.

Amintim faptul că $\text{lcm}(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g))$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al lui $\text{in}_<(f)$ și $\text{in}_<(g)$. În formula, c și d reprezintă coeficienții dominanți ai lui f și respectiv g .

EXEMPLU 1.1.27. Fie $f = x_1^3x_2 + x_1x_2 + x_3^2$ și $g = 2x_1^2 + x_2x_3$. Atunci $\text{lcm}(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g)) = x_1^3x_2$ relativ la ordinea lexicografică. Prin urmare S-polinomul lui f și g este

$$S(f, g) = \frac{x_1^3x_2}{x_1^3x_2} (x_1^3x_2 + x_1x_2 + x_3^2) - \frac{x_1^3x_2}{2x_1^2} (2x_1^2 + x_2x_3) = x_1x_2 - 1/2x_1x_2^2x_3 + x_3^2.$$

Observăm faptul că S-polinomul ne ajută să anulăm termeni dominanți ai lui f și g , și să obținem un alt polinom în același ideal cu termeni dominanți distincți.

Următoarea teoremă ne oferă o metodă de a verifica pentru un ideal dat $I = (g_1, \dots, g_m)$ dacă o mulțime de generatori $\{g_1, \dots, g_m\}$ formează o bază Gröbner pentru I .

TEOREMA 1.1.28 (Criteriul Buchberger). [13] Fie $I = (g_1, \dots, g_m)$ un ideal al lui S și $<$ o relație de ordine monomială definită pe S . Atunci $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ este o bază Gröbner al lui I relativ la relația $<$ dacă și numai dacă $S(g_i, g_j)$ se reduce la zero relativ la G , pentru orice $i < j$.

Pentru a calcula S-polinoamele lui $I = (g_1, \dots, g_m)$ pentru orice perechi de generatori poate fi împovorător. Următoarea propoziție ne poate ajuta să evităm calculele din anumite cazuri.

PROPOZIȚIE 1.1.29. [13] Fie f și g două polinoame din S cu relația de ordine monomială $<$. Dacă monoamele inițiale $\text{in}_<(f)$ și $\text{in}_<(g)$ sunt prime între ele, atunci $S(f, g)$ se reduce la 0 relativ la f și g .

EXEMPLU 1.1.30. Fie $I \subset K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ generat de cei doi minori ai matricei

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}.$$

Cu alte cuvinte, $I = (\{f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i : 1 \leq i < j \leq n\})$. Fie $<$ relația de ordine lexicografică din $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ indusă de $x_1 > x_2 > \dots > x_n > y_1 > \dots > y_n$. Vrem să arătăm că orice S-polinom $S(f_{ij}, f_{kl})$ are restul zero, unde $\{i, j\} \neq \{k, l\}$. Dacă $i \neq k$ și $j \neq l$, atunci $\text{in}_<(f_{ij})$ și $\text{in}_<(f_{kl})$ sunt prime între ele, deci $S(f_{ij}, f_{kl})$ are restul 0. Dacă $i = k$, putem presupune că $j < l$ și obținem astfel $S(f_{ij}, f_{kl}) = S(f_{ij}, f_{il}) = -x_j y_i y_l + x_l y_i y_j = -y_i f_{jl}$, care reprezintă o expresie standard al lui $S(f_{ij}, f_{kl})$ cu restul zero.

Dacă $j = l$, putem presupune că $i < k$ și astfel obținem $S(f_{ij}, f_{kl}) = S(f_{ij}, f_{kj}) = x_i x_j y_k - x_k x_j y_i = x_j f_{ik}$, care din nou reprezintă o expresie standard cu restul zero. În consecință, mulțimea minorilor $\{f_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ formează o bază Gröbner al lui I relativă la ordinea lexicografică.

Există un algoritm care permite calculul unei baze Gröbner pentru un ideal I folosind o mulțime dată de generatori a lui I . Algoritmul numit **algoritmul Buchberger** este de fapt o consecință a teoremei 1.1.28. Algoritmul Buchberger funcționează astfel:

Pas 1: Calculăm S-polinomul pentru fiecare pereche de elemente ale mulțimi generatoare G a idealului I .

Pas 2: Dacă toate S-polinoamele se reduc la zero, G este o bază Gröbner a lui I . Altfel adăugăm unul dintre resturile nenule la sistemul nostru de generatori, pentru a forma un nou sistem de generatori și revenim la Pas 1.

Cum orice șir strict crescător de ideale monomiale ale lui S este finit, algoritmul se sfârșește după un număr finit de pași.

EXEMPLU 1.1.31. Fie $I = (x_1^2 + 2x_1x_2^2, x_1x_2 + 2x_2^3 - 1) \subset \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. Folosind algoritmul Buchberger, formăm o bază Gröbner pentru I în $S = K[x_1, x_2]$ relativ la ordinea lexicografică.

Fie $f = x_1^2 + 2x_1x_2^2$, $g = x_1x_2 + 2x_2^3 - 1$. Vom calcula S-polinomul $S(f, g) = x_1$ al lui f și g . Deoarece $S(f, g) = x_1 \notin (\text{in}_<(f), \text{in}_<(g))$, vom adăuga $h = x_1$ la mulțimea generatorilor, obținând o nouă mulțime de generatori $\{f, g, h\}$.

Acum, vom alege perechea g, h . Deoarece monomul inițial al S-polinomului $S(g, h) = 2x_2^3 - 1$ nu este $(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g), \text{in}_<(h))$, vom obține un nou generator, anume $t = 2x_2^3 - 1$ și astfel mulțimea de generatori devine $\{f, g, h, t\}$.

Acum, nu trebuie să calculăm S-polinoamele pentru fiecare pereche, deoarece știm că $S(f, g) = h$ și $S(g, h) = t$. Avem, de asemenea, toate celelalte

resturi egale cu zero:

$$S(f, h) = 2x_1x_2^2 = 2x_2^2h$$

$$S(f, t) = 1/2x_1^2 + 2x_1x_2^5 = 1/2f + x_1x_2^2t$$

$$S(g, t) = 1/2x_1 + 2x_2^5 - x_2^2 = 1/2h + x_2^2t$$

$$S(h, t) = 1/2x_1 = 1/2h$$

Așadar baza Gröbner este $\{x_1^2 + 2x_1x_2^2, x_1x_2 + 2x_2^3 - 1, x_1, 2x_2^3 - 1\}$.

Putem adăuga mai multe polinoame la mulțimea G și vom avea în continuare o bază Gröbner a idealului. Însă, sub anumite condiții, există o unică bază Gröbner.

DEFINIȚIE 1.1.32. O mulțime $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ se numește *bază Gröbner redusă* a lui $I \subset S$ relativ la ordinea monomială $<$ dacă G este o bază Gröbner pentru I și sunt satisfăcute următoarele condiții:

- (i) Coeficientul dominant pentru fiecare g_i este 1;
- (ii) Pentru toți $i \neq j$, nici-un $u \in \text{supp}(g_j)$ nu este divizibil prin $\text{in}_<(g_i)$.

EXEMPLU 1.1.33. Baza Gröbner redusă a lui I în exemplul anterior este $\{x_1, x_2^3 - 1/2\}$.

1.2. Rezoluții libere graduate minimale de idealuri graduate

În această secțiune, vom prezenta date numerice care rezultă din rezoluții libere graduate minimale de coeficienți ai unui inel de polinoame printr-un ideal graduat.

Vom fixa, în aceasta secțiune, $S = K[x_1, \dots, x_n]$ un inel de polinoame în n variabile peste un corp K . Fiecare ideal graduat $I \subset S$ are o *rezoluție liberă graduată minimală* (unică până la un izomorfism).

$$F_\bullet : 0 \rightarrow F_p \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 = S \rightarrow S/I \rightarrow 0,$$

unde $F_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{ij}}$, pentru orice valoare a lui i . Exponenți $\beta_{ij} = \beta_{ij}(S/I)$ sunt numiți *numerele graduate Betti* ale lui S/I . *Numerele totale Betti* ale lui S/I sunt $\beta_i = \sum_j \beta_{ij}, i \geq 0$. *Dimensiunea proiectivă* a lui S/I este dată de

$$\text{proj dim}(S/I) = \max\{i : \beta_{ij} \neq 0, \text{ pentru anumiți } j \in \mathbb{Z}\}.$$

Conform cu formula Auslander-Buchsbaum [18, Corollary A 4.3] avem că

$$\text{depth } S/I = n - \text{proj dim } S/I.$$

Amintim faptul că $\text{depth } S/I$ reprezintă lungimea maximală a unei S/I -secvențe de elemente omogene conținute într-un ideal graduat maximal a lui

S . Este bine-cunoscut faptul că $\text{depth}(S/I) \leq \dim(S/I)$. Dacă are loc egalitatea, vom spune că I este un ideal Cohen-Macaulay. Deci, I este Cohen-Macaulay dacă și numai dacă $\text{depth}(S/I) = \dim(S/I)$.

Regularitatea lui S/I este definită astfel: dacă $\text{reg}(S/I) = \max\{j - i : \beta_{ij} \neq 0\}$. Toate datele numerice ce reies din rezoluții libere graduate minimale ale lui S/I sunt numite invarianți omologici ai lui S/I .

De obicei, numerele Betti graduate sunt prezentate în așa-numita *diagramă Betti* a lui S/I , care are forma indicată în Figura 1.1.

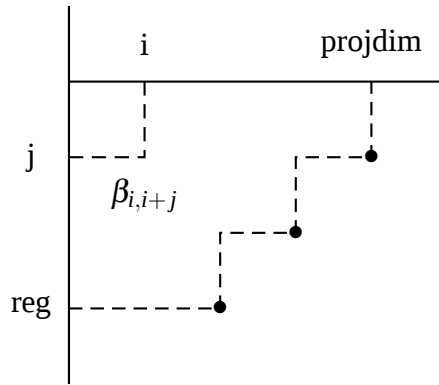


FIGURA 1.1

Numerele Betti marcate în figură prin puncte mari sunt numite *numere Betti extremale*.

EXEMPLU 1.2.1. Fie $J \subset S = K[x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5]$ un ideal

$$J = (x_1y_2 - x_2y_1, x_2y_3 - x_3y_2, x_2y_4 - x_4y_2, x_3y_4 - x_4y_3, x_2y_5 - x_5y_2, x_4y_5 - x_5y_4)$$

având idealul său inițial $\text{in}_<(J) \subset K[x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5]$, unde $<$ reprezintă ordinea lexicografică indusă de $x_1 > \dots > x_5 > y_1 > \dots > y_5$. Diagramele Betti ale lui S/J și $S/\text{in}_<(J)$ sunt prezentate mai jos.

Conform cu aceste diagrame, $S/\text{in}_<(J)$ și S/J au același număr Betti extremal: 4. Mai mult, avem $\text{proj dim}(S/J) = \text{proj dim}(S/\text{in}_<(J)) = 4$, de unde $\text{depth}(S/J) = \text{depth}(S/\text{in}_<(J)) = 6$ și $\text{reg}(S/J) = \text{reg}(S/\text{in}_<(J)) = 2$.

	0	1	2	3	4
0	1	—	—	—	—
1	—	6	4	—	—
2	—	—	9	12	4
Total	1	6	13	12	4

		0	1	2	3	4
	0	1	—	—	—	—
$\text{in}_<(J) :$	1	—	6	5	—	—
	2	—	1	10	12	4
	Total	1	7	15	12	4

Diagramele Betti ne ajută în a scrie rezoluțiile libere graduate minimale pentru fiecare ideal:

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow S(-6)^4 \rightarrow S(-5)^{12} \rightarrow S(-3)^4 \oplus S(-4)^9 \rightarrow S(-2)^6 \rightarrow S \rightarrow S/J \rightarrow 0, \\
 0 \rightarrow S(-6)^4 \rightarrow S(-5)^{12} \rightarrow S(-3)^5 \oplus S(-4)^{10} \rightarrow \\
 \rightarrow S(-2)^6 \oplus S(-3) \rightarrow S \rightarrow S/\text{in}_<(J) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

DEFINIȚIE 1.2.2. Un inel graduat S/I are $(d-1)$ -rezoluții lineare (sau, echivalent, I are d -rezoluții liniare) dacă rezoluția sa liberă graduată minimală are următoarea formă

$$0 \rightarrow S(-p)^{\beta_{p-d+1}} \rightarrow S(-p+1)^{\beta_{p-d}} \rightarrow \dots \rightarrow S(-d-1)^{\beta_2} \rightarrow S(-d)^{\beta_1} \rightarrow S \rightarrow S/I \rightarrow 0. \quad (*)$$

Această definiție ne spune faptul că S/I are $(d-1)$ -rezoluții lineare dacă și numai dacă $\beta_{ij}(S/I) = 0$ pentru fiecare $j \neq i + d - 1$. În diagrama Betti a lui S/I , exceptând poziția $\beta_{(0,0)} = 1$, toate celelalte numere Betti graduate nenule sunt situate pe randul $(d-1)$. Cu alte cuvinte, S/I are $(d-1)$ -rezoluții lineare dacă și numai dacă I este generat cu gradul d și $\text{reg}(S/I) = d - 1$.

EXEMPLU 1.2.3. Fie $I \subset K[x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4]$, $I = (x_1y_2 - x_2y_1, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_4 - x_4y_1, x_2y_3 - x_3y_2, x_2y_4 - x_4y_2, x_3y_4 - x_4y_3)$. S/I are 2-rezoluții lineare. Diagrama lui S/I este următoarea.

	0	1	2	3
0	1	—	—	—
1	—	6	8	3

OBSERVAȚIE 1.2.4. Facem următoarea remarcă despre rezoluțiile lineare. Dacă S/I are o rezoluție lineară, atunci, aplicând proprietatea de aditivitate a seriilor Hilbert în (*), obținem că

$$H_{S/I}(t) = \frac{1 - \beta_1 t^d + \beta_2 t^{d+1} - \dots + (-1)^{p-d+1} \beta_{p-d+1} t^p}{(1-t)^n}.$$

Această formulă ne indică faptul că dacă S/I are o rezoluție lineară, atunci numerele Betti sunt determinate de seriile sale Hilbert $H_{S/I}$.

O comparație între numerele graduate Betti ale lui S/I și $S/\text{in}_<(I)$, unde $<$ reprezintă o relație de ordine monomială în S , este dată de următoarea teoremă și următorul corolar.

TEOREMA 1.2.5. [18] Pentru orice i și j , $\beta_{ij}(S/I) \leq \beta_{ij}(S/\text{in}_{<}(I))$.

Această inegalitate dintre numerele graduate Betti ne conduc la următoarele consecințe.

COROLAR 1.2.6. [18]

- (i) $\text{proj dim } S/I \leq \text{proj dim } (S/\text{in}_{<}(I))$.
- (ii) $\text{depth } S/I \geq \text{depth } (S/\text{in}_{<}(I))$.
- (iii) $\text{reg } S/I \leq \text{reg } (S/\text{in}_{<}(I))$.
- (iv) Dacă $S/\text{in}_{<}(I)$ este Cohen-Macaulay, atunci S/I este Cohen-Macaulay.
- (v) Dacă $S/\text{in}_{<}(I)$ are o rezoluție lineară, atunci S/I are o rezoluție lineară.

1.3. Un scurt rezumat despre descompunerea primară

În această subsecțiune vom urmări în principal cartea [11, Chapter 3]. Fie R un inel și M un R -modul. Idealul prim P al lui R este numit *prim asociat* a lui M , dacă există anumiți $m \in M$ astfel încât

$$P = (0 :_R m) = \{r \in R : rm = 0\}.$$

În particular, dacă $I \subset R$ este un ideal, atunci P este un prim asociat al lui R/I (sau, mai simplu, al lui I), dacă $P = I : (a)$ pentru un $a \in R$.

Vom descrie rezultatele principale despre primi asociați ai unui modul în teorema următoare. Vom începe prin a aminti faptul că mulțimea tuturor asociaților primi ai lui M este notată, de obicei, prin $\text{Ass}(M)$. Foarte des, vom scrie $\text{Ass}(I)$ în loc de $\text{Ass}(R/I)$ pentru un ideal I a lui R .

TEOREMA 1.3.1. [11] Fie R un inel Noetherian și M un R -modul nevidă finit generat. Atunci:

- (a) $\text{Ass}(M)$ este o mulțime nevidă, care conține mulțimea idealelor prime minimale peste anihilatorul lui M , $\text{Ann}(M)$, unde $\text{Ann}(M) = \{r \in R : rM = 0\}$. În particular, $\text{Ass}(I) \supseteq \text{Min}(I)$. Aici, $\text{Min}(I)$ descrie mulțimea idealelor prime minimale ale lui I .
- (b) Avem că $Z(M) = \bigcup_{P \in \text{Ass}(M)} P$ unde $Z(M)$ descrie mulțimea tuturor divizorilor lui zero din M .
- (c) $\text{Ass}(M)$ comută cu localizarea. Mai precis, dacă $S \subset R$ reprezintă o mulțimea multiplicativă, atunci

$$\text{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}P : P \in \text{Ass}(M), P \cap S = \emptyset\}.$$

- (d) Dacă $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ reprezintă o secvență exactă de R -module, atunci

$$\text{Ass}(M') \subset \text{Ass}(M) \subset \text{Ass}(M') \cup \text{Ass}(M'').$$

DEFINIȚIE 1.3.2. Fie R un inel Noetherian și P un ideal prim al lui R . Idealul I al lui R este numit un P -ideal primar (sau mai simplu un ideal primar) dacă $\text{Ass}(R/I) = \{P\}$.

TEOREMA 1.3.3. [11] Fie R un inel Noetherian. Atunci orice ideal I al lui R are o descompunere $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_r$, unde:

- (a) Q_i este P_i -primar pentru orice i ;
- (b) descompunerea este iredundantă, adică nici-un Q_i nu poate fi omis din descompunere;
- (c) P_i -urile sunt două câte două distincte.

Mai mult, $\text{Ass}(I) = \{P_1, \dots, P_r\}$.

Descompunerea de mai sus este numită *descompunere primară* a lui I . În continuare vom analiza rezultatele principale despre descompunerea primară de ideale monomiale, urmărind în principal noțiunile descrise în [18].

TEOREMA 1.3.4. [18] Fie $I \subset S = K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal monomial. Atunci $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$, unde fiecare Q_i este generat de puteri pure ale variabilelor. Cu alte cuvinte, fiecare Q_i are forma $(x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_k}^{a_k})$.

Mai mult, se poate arăta faptul că descrierea iredundantă construită în demonstrația de mai sus este unică.

Un ideal monomial este numit *irreductibil* dacă nu poate fi scris ca o intersecție proprie de două ideale monomiale. Se numește *reductibil* dacă nu este irreductibil.

COROLAR 1.3.5. [18] Un ideal monomial este irreductibil dacă și numai dacă este generat de puterile pure ale variabilelor.

Conform teoremei 1.3.4 și corolarului 1.3.5, avem că orice monom are o reprezentare unică ca o intersecție iredundantă de ideale monomiale irreductibile, mai mult, demonstrația teoremei 1.3.4 ne oferă o metodă de a găsi o astfel de reprezentare.

EXEMPLU 1.3.6. Fie $I = (x_1^2 x_2^3, x_2^2 x_3, x_3^2)$. Atunci

$$\begin{aligned} I &= (x_1^2, x_2^2 x_3, x_3^2) \cap (x_2^3, x_2^2 x_3, x_3^2) \\ &= (x_1^2, x_2^2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_3, x_3^2) \cap (x_2^3, x_2^2, x_3^2) \cap (x_2^3, x_3, x_3^2) \\ &= (x_1^2, x_2^2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_3) \cap (x_2^3, x_3). \end{aligned}$$

Pentru ideale monomiale libere de pătrate avem următorul corolar.

COROLAR 1.3.7. [18] Fie $I \subset S$ un ideal monomial liber de pătrate. Atunci

$$I = \bigcap_{P \in \text{Min}(I)} P,$$

și fiecare $P \in \text{Min}(I)$ este un ideal monomial prim.

Aici $\text{Min}(I)$ reprezintă, ca de obicei, mulțimea idealelor prime minimale ale lui I .

Vom încheia această secțiune prin a aminti faptul că descompunerea primară obținută dintr-o intersecție iredundantă de ideale ireductibile este unică și o vom numi *descompunerea primară standard* a lui I .

1.4. Ideale binomiale muchie

Fie G un graf simplu definit pe mulțimea de vârfuri $[n]$ și având mulțimea de muchii $E(G)$. Considerăm $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ ca fiind un inel de polinoame în $2n$ variabile cu coeficienți în corpul K .

Definim idealul binomial muchie $J_G \subset S$ asociat cu graful G ca fiind idealul generat de toate binoamele $f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ unde $1 \leq i < j \leq n$ cu $\{i, j\} \in E(G)$.

Remarcăm faptul că dacă G are un vârf izolat i , și G' reprezintă restricția lui G la mulțimea de vârfuri $[n] \setminus \{i\}$, atunci $J_G = J_{G'}$. Din această cauză, vom presupune că G nu are vârfuri izolate.

Considerăm inelul de polinoame S înzestrat cu o ordine lexicografică indusă de ordinea naturală a variabilelor $x_1 > x_2 > \dots > x_n > y_1 > y_2 > \dots > y_n$. Vom nota prin $\text{in}_<(J_G)$ idealul inițial al lui J_G respectând ordinea monomială. Idealul $\text{in}_<(J_G)$ este un ideal monomial generat minimal de monoamele inițiale ale binoamelor din baza Gröbner redusă a lui J_G , relativ la ordinea lexicografică.

EXEMPLU 1.4.1. În Figura 1.2, G este un graf simplu definit pe mulțimea de vârfuri $[6]$.

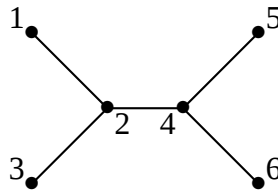


FIGURA 1.2

Idealul binomial muchie a lui G este $J_G = (f_{12}, f_{23}, f_{24}, f_{45}, f_{46})$. Baza Gröbner redusă a lui J_G relativă la ordinea lexicografică este $\mathcal{G} = \{x_1 y_2 - x_2 y_1, x_2 y_3 - x_3 y_2, x_2 y_4 - x_4 y_2, x_4 y_5 - x_5 y_4, x_4 y_6 - x_6 y_4, x_3 y_2 y_4 - x_4 y_2 y_3, x_5 y_4 y_6 - x_6 y_4 y_5\}$. Așadar, idealul inițial al lui J_G este

$$\text{in}_<(J_G) = (x_1 y_2, x_2 y_3, x_2 y_4, x_4 y_5, x_4 y_6, x_3 y_2 y_4, x_5 y_4 y_6).$$

1.4.1. Ideale binomiale muchie cu baze Gröbner pătratică. În aceasta subsecție, vom prezenta două exemple fundamentale de ideale binomiale muchie. Ambele exemple sunt ideale cu proprietatea că generatorii lor formează o bază Gröbner redusă.

Grafurile G a caror ideale binomiale muchie asociate J_G dețin și ele proprietatea de mai sus (i.e. J_G are o bază Gröbner pătratică) sunt descrise în combinatorica prin următoarea teoremă.

TEOREMA 1.4.2. [19, Theorem 1.1] *Fie G un graf simplu definit pe mulțimea de vârfuri $[n]$ având mulțimea de muchii $E(G)$, și fie $<$ relația de ordine lexicografică peste S indusă de $x_1 > \dots > x_n > y_1 > \dots > y_n$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (a) *Generatorii f_{ij} ai lui J_G formează o bază Gröbner patrată.*
- (b) *Pentru orice muchie $\{i, j\}$ și $\{i, k\}$ cu $j > i < k$ sau $j < i > k$ avem $\{j, k\} \in E(G)$.*

Cu alte cuvinte, dacă reprezentăm muchia $\{i, j\}$ cu $i < j$ printr-o săgeată de la punctul i la punctul j , vom avea următoarea reprezentare a unui graf care satisface condiția (b) din teorema 1.4.2.

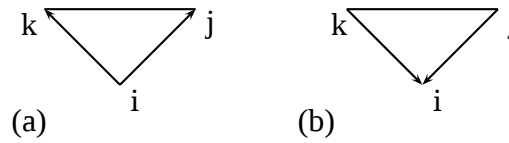


FIGURA 1.3

EXEMPLU 1.4.3. Fie G un graf cu muchiile $\{1, 2\}$ și $\{1, 3\}$. Vom avea $J_G = (x_1y_2 - x_2y_1, x_1y_3 - x_3y_1)$. Calculăm S -polinomul lui f_{12} și f_{13} . Obținem $S(f_{12}, f_{13}) = y_1(x_2y_3 - x_3y_2) \in J_G$. Deci $S(f_{12}, f_{13}) = x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2 \in J_G$.

Dar, monomul inițial $x_2y_1y_3$ of $S(f_{12}, f_{13})$ nu aparține idealului generat de monoamele inițiale ale lui f_{12} și f_{13} . Aceasta ne demonstrează că $\{f_{12}, f_{13}\}$ nu este o bază Gröbner a lui J_G .

În ciuda acestui fapt, pentru același graf, cu altă etichetare $\{1, 2\}, \{2, 3\}$ generatorii lui J_G formează o bază Gröbner.

Pentru idealul binomial muchie asociat $J_G = (x_1y_2 - x_2y_1, x_2y_3 - x_3y_2)$, S -polinomul lui f_{12} și f_{23} se reduce la 0 deoarece monoamele inițiale ale lui f_{12} și f_{23} sunt prime între ele.

DEFINIȚIE 1.4.4. Un graf G înzestrat cu o etichetare care satisface condiția (b) din teorema 1.4.2 este numit *închis relativ la etichetarea dată*.

Astfel, putem reformula teorema 1.4.2, spunând că generatorii lui J_G formează o bază Gröbner relativă la ordinea lexicografică dacă și numai dacă G este închis relativ la etichetarea dată.

Am indicat faptul că graful din Figura 1.3(a), fără muchia $\{j, k\}$, nu este închis pentru etichetarea $i = 1, j = 2, k = 3$ și este închis pentru etichetarea $k = 1, i = 2, j = 3$.

DEFINIȚIE 1.4.5. Un graf G este *închis* dacă există o etichetare a vârfurilor astfel încât G să fie închis relativ la aceasta.

Următoarele grafuri sunt exemple de grafuri care nu sunt închise. Să remarcăm faptul că dacă un graf G este închis, atunci orice subgraf indus al lui G este, de asemenea, închis. Așadar, dacă graful G conține drept subgraf indus oricare dintre următoarele grafuri descrise mai jos, atunci el nu va fi închis.

EXEMPLU 1.4.6.

- (i) Graful cu trei muchii diferite e_1, e_2, e_3 astfel încât $e_1 \cap e_2 \cap e_3 \neq \emptyset$ este numită *graful ghiară*. Graful ghiară nu este închis; vezi Figura 1.4. Așadar, orice graf închis, trebuie să fie liber de ghiare.

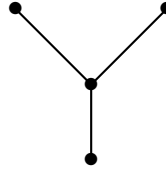


FIGURA 1.4

- (ii) Orice ciclu C_n de lungime $n \geq 4$ nu este închis. Să presupunem că există o etichetare a vârfurilor sale, $a_1, \dots, a_n$ (etichetare în sensul acelor de ceasornic). Pentru a obține o etichetare închisă, ar trebui, fie să alegem $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_1$, fie $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_1$. Deoarece C_n nu are nici-o coardă, ambele alegeri conduc la o contradicție.

Spre exemplu în C_4 , dacă etichetăm în direcția acelor de ceasornic, $1, 2, 3, 4$, atunci, $\{2, 4\}$ ar trebui să aparțină mulțimii de muchi, deoarece $\{1, 2\} \in E(C_4)$ și $\{1, 4\} \in E(C_4)$; și de asemenea $\{1, 3\}$ ar trebui să aparțină mulțimii de muchii, pentru a avea un graf închis, deoarece $\{1, 4\} \in E(C_4)$ și $\{3, 4\} \in E(C_4)$.

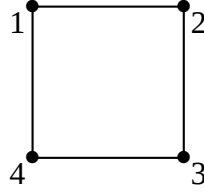


FIGURA 1.5

Conform cu această observație, vom formula următoarea propoziție.

PROPOZIȚIE 1.4.7. Dacă G este închis atunci G este un graf cordal, adică nu are nici-un ciclu de lungime ≥ 4 și este liber de ghiare.

De asemenea se poate demonstra că un graf bipartit nu este închis decât dacă este un graf linie; vezi [19, Corollary 1.3].

În următoarea secțiune, vom studia ideale binomiale muchie a două clase de grafuri închise.

1.4.1.1. Idealul binomial muchie al unui graf complet. Fie $G = K_n$ un graf complet definit pe mulțimea de vârfuri $[n]$. K_n are mulțimea de muchii $E(K_n) = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Mai jos, am reprezentat graful complet cu 3 și 4 vârfuri. Evident, K_n este închis reativ la orice etichetare a varfurilor.

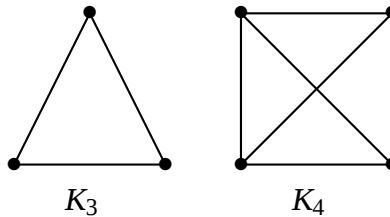


FIGURA 1.6. Grafuri complete

Idealul binomial muchie al lui K_n este idealul $I_2(X)$ al tuturor minorilor 2×2 (minori maximali) ai matricei $2 \times n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, avem că

$$J_G = J_{K_n} = I_2(X) = (x_i y_j - x_j y_i : 1 \leq i < j \leq n) \subset S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n].$$

Vom lista o serie de proprietăți a lui J_{K_n} .

- (i) Graful complet este închis relativ la orice etichetare. Prin urmare, conform cu teorema 1.4.2, generatorii lui J_{K_n} formează o bază Gröbner.
- (ii) Fie $<$ relația de ordine lexicografică definită pe S indusă de ordinea naturală a nedeterminatelor. Atunci

$$\text{in}_{<}(J_{K_n}) = (x_i y_j : 1 \leq i < j \leq n) = \bigcap_{i=1}^n (x_1, \dots, x_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n).$$
- (iii) Avem că $\dim \left(\frac{S}{J_{K_n}} \right) = \dim \left(\frac{S}{\text{in}_{<}(J_{K_n})} \right) = \dim(S) - \text{height}(\text{in}_{<}(J_{K_n})) = 2n - (n - 1) = n + 1$.
- (iv) $\frac{S}{J_{K_n}}$ este un domeniu [13, Theorem 6.35]. Așadar, J_{K_n} este un ideal prim.
- (v) $\text{in}_{<}(J_{K_n})$ are coeficienți lineari.
- (vi) Atât $\text{in}_{<}(J_{K_n})$, cât și J_{K_n} au o rezoluție lineară. Într-adevăr, este bine-cunoscut faptul că un ideal graduat generat într-un singur grad, care are coeficienți lineari, are de asemenea o rezoluție lineară; vezi [18, Proposition 8.2.1]. Aceasta ne arată că $\text{in}_{<}(J_{K_n})$ are o rezoluție lineară. Pentru partea a doua aplicăm corolarul 1.2.6.
- (vii) $\text{in}_{<}(J_{K_n})$ este Cohen-Macaulay.
- (viii) J_{K_n} este Cohen-Macaulay, deoarece, conform cu corolarul 1.2.6, dacă $\text{in}_{<}(J_{K_n})$ este Cohen-Macaulay atunci și J_{K_n} este Cohen-Macaulay.

1.4.1.2. Idealul binomial muchie al unui graf liniar. Fie $G = L_n$ un graf liniar definit pe mulțimea de vârfuri $[n]$ cu $E(G) = \{(i, i+1) : 1 \leq i \leq n-1\}$. Idealul binomial muchie J_G al lui L_n este $J_{L_n} = (f_{i,i+1} : 1 \leq i \leq n-1)$. În continuare vom lista o serie de proprietăți a lui J_{L_n} .

- (i) Graful linear L_n este închis relativ la ordinea naturală a vârfurilor sale. Așadar, în concordanță cu teorema 1.4.2, mulțimea generatorilor $\{f_{i,i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$ formează o bază Gröbner pentru J_{L_n} . De fapt este posibil să obținem aceeași concluzie fără a folosi teorema 1.4.2. Stim că monoamele inițiale ale oricăror doi generatori distincți ai lui J_{L_n} sunt prime între ele. Atunci, concluzionăm că generatorii lui J_{L_n} formează o bază Gröbner datorită propoziției 1.1.29.
- (ii) $\text{in}_{<}(J_{L_n}) = (x_i y_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1)$ este generat de secvența regulată de lungime $n-1$ de monoame de grad 2. Aceasta implică faptul că generatorii $f_{12}, f_{23}, \dots, f_{n-1,n}$ ai lui J_{L_n} formează o secvență regulată peste S . Acest rezultat este o consecință a următoarei leme.

LEMA 1.4.8. Fie $I \subset S = K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal graduat și $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ bază Gröbner redusă a lui I relativă la $<$. Dacă $\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_m)$ este o secvență regulată în S , atunci $g_1, \dots, g_m$ este o secvență regulată în S .

- (iii) Deoarece J_{L_n} este o intersecție completă, adică, J_{L_n} este generat de o secvență regulată, rezultă că J_{L_n} este Cohen-Macaulay. Avem că

$$\text{depth} \left(\frac{S}{J_{L_n}} \right) = \dim \left(\frac{S}{J_{L_n}} \right) = n + 1.$$

1.4.2. Baze Gröbner pentru ideale binomiale muchie. În general, pentru un graf arbitrar G , J_G are o bază Gröbner a caror monoame inițiale sunt libere de pătrate.

Pentru a caracteriza în termeni de combinatorică baza Gröbner a lui J_G , introducem următoarea definiție.

DEFINIȚIE 1.4.9. Fie $i < j$ două vârfuri a lui G . Un drum $i = i_0, i_1, \dots, i_{r-1}, i_r = j$ de la i la j este numit *admisibil* dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:

- (i) $i_k \neq i_\ell$ pentru $k \neq \ell$;
- (ii) pentru orice $k = 1, \dots, r-1$, avem fie că $i_k < i$, fie că $i_k > j$;
- (iii) pentru orice submulțime proprie $\{j_1, \dots, j_s\}$ a lui $\{i_1, \dots, i_{r-1}\}$, secvența $i, j_1, \dots, j_s, j$ nu este un drum în G .

Având un drum dat admisibil π a lui G de la i la j , vom asocia un monom

$$u_\pi = \left(\prod_{i_k > j} x_{i_k} \right) \left(\prod_{i_\ell < i} y_{i_\ell} \right).$$

Evident, orice muchie a lui G este un drum admisibil. În acest caz, monomul asociat este doar 1.

EXEMPLU 1.4.10. Toate drumurile admisibile, excluzând muchiile sale, ale lui C_5 , relativ la etichetarea dată în Figura 1.7, sunt:

$$\pi_1 = 1, 5, 4; \quad \pi_2 = 2, 1, 5; \quad \pi_3 = 1, 5, 4, 3; \quad \pi_4 = 2, 1, 5, 4; \quad \pi_5 = 3, 2, 1, 5.$$

Monoamele asociate pentru aceste drumuri admisibile sunt:

$$u_{\pi_1} = x_5; \quad u_{\pi_2} = y_1; \quad u_{\pi_3} = x_4 x_5; \quad u_{\pi_4} = x_5 y_1; \quad u_{\pi_5} = y_1 y_2.$$

Remarcăm faptul că, într-un graf închis, drumurile admisibile sunt doar muchiile lui G . Așadar, dacă G este închis și conex atunci $\{i, i+1\}$ este o muchie a lui G pentru orice i .

TEOREMA 1.4.11. [19] *Mulțimea binoamelor*

$$\Gamma = \bigcup_{i < j} \{u_\pi f_{ij} : \pi \text{ este un drum admisibil de la } i \text{ la } j\}$$

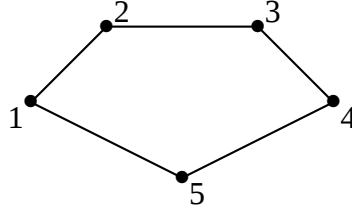


FIGURA 1.7

este bază Gröbner redusă a lui J_G relativă la ordinea lexicografică definită pe S indusă de ordinea naturală a nedeterminatelor, $x_1 > \dots > x_n > y_1 > \dots > y_n$.

EXEMPLU 1.4.12. Pentru graful C_5 din figura 1.7 dată în exemplul anterior, baza Gröbner redusă a lui J_{C_5} relativă la ordinea lexicografică este:

$$\{x_4x_5f_{13}, x_5y_1f_{24}, y_1y_2f_{35}, x_5f_{14}, y_1f_{25}, f_{12}, f_{15}, f_{23}, f_{34}, f_{45}\}.$$

Ca o consecință a teoremei 1.4.11, observăm că orice drum admisibil a grafului G poate fi determinat prin calculul bazei Gröbner redusă a lui J_G .

EXEMPLU 1.4.13. Fie $G = K_{3,2}$ un graf complet bipartit cu 5 vârfuri date ca în Figura 1.8.

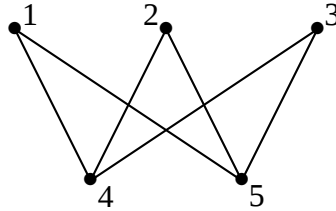


FIGURA 1.8

Drumurile admisibile ale lui $K_{3,2}$, excluzând muchiile sunt:

$$\begin{aligned} \pi_1 = 1, 4, 2; \quad \pi_2 = 1, 5, 2; \quad \pi_3 = 1, 4, 3; \quad \pi_4 = 1, 5, 3; \quad \pi_5 = 2, 4, 3; \\ \pi_6 = 2, 5, 3; \quad \pi_7 = 4, 1, 5; \quad \pi_8 = 4, 2, 5; \quad \pi_9 = 4, 3, 5. \end{aligned}$$

Baza Gröbner redusă a unui ideal binomial muchie a unui graf complet bipartit $G = K_{3,2}$ este dată de $J_G = (f_{14}, f_{15}, f_{24}, f_{25}, f_{34}, f_{35}, x_4f_{12}, x_5f_{12}, x_4f_{13}, x_5f_{13}, x_4f_{23}, x_5f_{23}, y_1f_{45}, y_2f_{45}, y_3f_{45})$.

1.4.3. Descompunere primară de ideale binomiale muchie. J_G este un ideal radical [19, Corollary 2.2]. Aceasta este o consecință a teoremei 1.4.2. Deoarece un ideal radical poate fi exprimat ca intersecția dintre idealele sale prime minimale, avem că

$$J_G = \bigcap_{P \in \text{Min}(J_G)} P,$$

unde $\text{Min}(J_G)$ reprezintă mulțimea idealelor prime minimale ale lui J_G .

În continuare, dorim să caracterizăm idealele prime minimale ale lui J_G în termeni combinatorici ai lui G . Pentru a realiza aceasta avem nevoie să introducem următoarea notație.

Fie G un graf simplu cu mulțimea de vârfuri $[n]$. Pentru fiecare submulțime $\mathcal{S} \subset [n]$ definim un ideal prim $P_{\mathcal{S}}$ în modul următor. Fie $G_1, \dots, G_{c(\mathcal{S})}$ componentele conexe ale lui $G_{[n] \setminus \mathcal{S}}$, unde $G_{[n] \setminus \mathcal{S}}$ este subgraful indus de G peste mulțimea de vârfuri $[n] \setminus \mathcal{S}$. Pentru $1 \leq i \leq c(\mathcal{S})$, fie $\tilde{G}_i$ graful complet peste mulțimea de vârfuri $V(G_i)$. Vom fixa

$$P_{\mathcal{S}}(G) = (\{x_i, y_i\}_{i \in \mathcal{S}}, J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_{c(\mathcal{S})}}).$$

Folosind proprietatea (iv) a lui J_{K_n} , rezultă că $P_{\mathcal{S}}(G)$ este un ideal prim, deoarece $J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_{c(\mathcal{S})}}$ sunt ideale prime binomiale ai căror generatori aparțin unor mulțimi de variabile distincte.

Observăm că, pentru orice $\mathcal{S} \subset [n]$, $P_{\mathcal{S}}(G) \supset J_G$ și $\dim S/P_{\mathcal{S}}(G) = \sum_{i=1}^{c(\mathcal{S})} \dim(S_i/J_{\tilde{G}_i})$ unde S_i este inelul polinoamelor în variabilele x_j, y_j cu $j \in V(G_i)$. Astfel, obținem că

$$\dim S/P_{\mathcal{S}}(G) = \sum_{i=1}^{c(\mathcal{S})} (|V(G_i)| + 1) = c(\mathcal{S}) + \sum_{i=1}^{c(\mathcal{S})} |V(G_i)| = c(\mathcal{S}) + n - |\mathcal{S}|.$$

TEOREMA 1.4.14. [19] *Fie G un graf simplu cu mulțimea de vârfuri $[n]$. Atunci*

$$J_G = \bigcap_{\mathcal{S} \subset [n]} P_{\mathcal{S}}(G).$$

În particular, idealele prime minimale ale lui J_G se află printre idealele prime $P_{\mathcal{S}}(G)$, unde $\mathcal{S} \subset [n]$.

Demonstrația acestei teoreme poate fi găsită în [19, Theorem 3.2].

COROLAR 1.4.15. [19, Corollary 3.3] *Fie G un graf simplu definit peste mulțimea de vârfuri $[n]$. Atunci*

$$\dim S/J_G = \max\{n - |\mathcal{S}| + c(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \subset [n]\}.$$

Dacă alegem $\mathcal{S} = \emptyset$, atunci numărul de componente conexe a lui G este $c = c(\emptyset)$. Deoarece nu există nici-o variabilă în $P_\emptyset(G)$, se poate observa ușor că $P_\emptyset(G)$ nu este comparabil cu nici-un alt ideal prim $P_{\mathcal{S}}(G)$ unde $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Așadar, $P_\emptyset(G)$ este un ideal prim minimal al lui J_G . Calculăm $\dim S/P_\emptyset(G) = n + c$ care reprezintă valoarea maximă a lui $n - |\mathcal{S}| + c(\mathcal{S})$, spre exemplu, atunci când J_G este Cohen-Macaulay. Deoarece, în acest caz, J_G nu este mixt, rezultă că toate idealele prime minimale au aceeași dimensiune. În particular, dacă G este conex, atunci J_G nu este mixt dacă și numai dacă pentru orice ideal prim minimal $P_{\mathcal{S}}(G)$ al lui G , avem că $n - |\mathcal{S}| + c(\mathcal{S}) = n + 1$, adică $c(\mathcal{S}) - |\mathcal{S}| = 1$.

În continuare, vom prezenta o teoremă care caracterizează mulțimile $\mathcal{S}$ pentru care idealul prim $P_{\mathcal{S}}(G)$ este minimal.

TEOREMA 1.4.16. [19] *Fie G un graf conex definit pe mulțimea de vârfuri $[n]$, și fie $\mathcal{S} \subset [n]$. Atunci $P_{\mathcal{S}}(G)$ este un ideal prim minimal al lui J_G dacă și numai dacă $\mathcal{S} = \emptyset$ sau $\mathcal{S}$ este nevidă și pentru fiecare $i \in \mathcal{S}$ avem $c(\mathcal{S} \setminus \{i\}) < c(\mathcal{S})$.*

Demonstrația poate fi găsită în [19, Corollary 3.9].

O mulțime $\mathcal{S} \subset [n]$ care satisface condiția teoremei de mai sus este numită *mulțime de puncte-tăietură* a lui G . Teorema ne spune simplu faptul că, dacă G este un graf conex, atunci $P_{\mathcal{S}}(G)$ este un ideal prim minimal al lui J_G dacă și numai dacă fiecare $i \in \mathcal{S}$ este un punct de tăietură a grafului $G_{([n] \setminus \mathcal{S}) \cup \{i\}}$.

EXEMPLU 1.4.17.

- (1) Singura mulțime de puncte de tăietură este mulțimea vidă, pentru grafuri complete G .
- (2) Fie $G = L_n$ un graf linear definit pe mulțimea de vârfuri $[n]$ cu etichetarea naturală a vârfurilor. Atunci, o submulțime nevidă $\mathcal{S} \subset [n]$ este o mulțime de puncte de tăietură a lui G dacă și numai dacă $\mathcal{S} = \{i_1, \dots, i_r\}$ cu $1 < i_1 < \dots < i_r < n$ și $i_{s+1} - i_s > 1$ pentru toate $1 \leq s \leq r - 1$. Spre exemplu, fie $G = L_5$ graful linear cu 5 vârfuri. Vezi Figura 1.9.

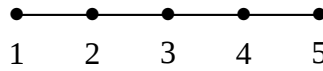


FIGURA 1.9

Mulțimile punctelor de tăietură sunt $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 4\}$. Așadar, putem scrie

$$J_G = P_\emptyset(G) \cap P_{\{2\}}(G) \cap P_{\{3\}}(G) \cap P_{\{4\}}(G) \cap P_{\{2,4\}}(G)$$

ca pe o intersecție de ideale prime minimale corespunzătoare. Avem, spre exemplu, $P_{\{2,4\}}(G) = (x_2, y_2, x_4, y_4)$, $P_{\{2\}}(G) = (x_2, y_2, x_3y_4 - x_4y_3, x_3y_5 - x_5y_3, x_4y_5 - x_5y_4)$.

- (3) Fie G un ciclu cu n vârfuri, $G = C_n$. O mulțime nevidă de puncte de tăietură $\mathcal{S} \subset [n]$ are loc atunci când $|\mathcal{S}| > 1$ și două elemente $i, j \in \mathcal{S}$ aparțin aceleiași muchii a lui C_n . J_G nu este mixt deoarece $\dim P_0(G) = n + 1$ și orice alt ideal prim minimal are dimensiunea n . Aici, spre exemplu, avem idealele prime minimale ale lui $G = C_5$ date în Figura 1.7:

$$P_0(G), P_{\{1,3\}}(G), P_{\{1,4\}}(G), P_{\{2,4\}}(G), P_{\{2,5\}}(G), P_{\{3,5\}}(G).$$

- (4) Fie G un graf având mulțimea varfurilor $[7]$ ca în Figura 1.10.

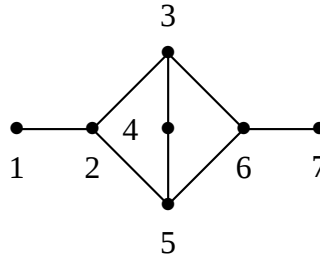


FIGURA 1.10

Mulțimea punctelor de tăietură a lui G este $\emptyset, \{2\}, \{6\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{2,4,6\}$. Așadar avem că

$$J_G = P_0(G) \cap P_{\{2\}}(G) \cap P_{\{6\}}(G) \cap P_{\{2,6\}}(G) \cap P_{\{3,5\}}(G) \cap P_{\{2,4,6\}}(G),$$

unde, spre exemplu,

$$P_{\{2,6\}}(G) = (x_2, y_2, x_6, y_6, x_3y_4 - x_4y_3, x_3y_5 - x_5y_3, x_4y_5 - x_5y_4).$$

Calculăm simplu că $\dim S/J_G = 8$ pentru valoarea maximă a lui $n - |\mathcal{S}| + c(\mathcal{S})$ when $\mathcal{S} = \emptyset$.

1.4.4. Rezoluțiile libere graduate minimale ale anumitor ideale binomiale muchie. Vom considera idealul binomial muchie al grafului linear. Fie $G = L_n$ graful linear cu n vârfuri și $E(G) = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\}$.

Așa cum am văzut deja, generatorii $f = f_{12}, f_{23}, \dots, f_{n-1,n}$ ai lui J_{L_n} formează o secvență regulată în S . Așadar, complexul Koszul $K_\bullet(f)$ ne conduce la rezoluția liberă graduată minimală a lui S/J_{L_n} :

$$K_\bullet(f) : 0 \rightarrow K_{n-1}(f) \rightarrow \dots \rightarrow K_j(f) \rightarrow \dots \rightarrow K_1(f) \rightarrow K_0(f) = S \rightarrow S/J_{L_n} \rightarrow 0.$$

S -modulul $K_j(f)$ este a j -a putere exterioară a S -modulului liber de rang $n - 1$ de bază $e_1, \dots, e_{n-1}$. Deci, $K_j(f)$ este de asemenea liber peste S de rang $\binom{n-1}{j}$ și bază

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_j} : 1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n - 1\}.$$

Deoarece vrem să avem toate mapările din rezoluția de mai sus de graf 0 , vom lua $K_j(f) = S(-2j)^{\binom{n-1}{j}}$, pentru orice j . Așadar,

$$\beta_{ij}(S/J_{L_n}) = \begin{cases} \binom{n-1}{i}, & j = 2i \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Pe de altă parte, generatorii lui $\text{in}_{<}(J_{L_n})$ au aceeași proprietate, în principal formează o secvență regulată în S . Aceasta implică faptul că avem o rezoluție similară pentru $S/\text{in}_{<}(J_{L_n})$. Pentru regularitate avem

$$\text{reg } S/J_{L_n} = \text{reg}(S/\text{in}_{<}(J_{L_n})) = n - 1.$$

Considerăm, acum, idealul binomial muchie al unui graf complet. Fie $G = K_n$ graful complet definit pe mulțimea de vârfuri $[n]$. Așa cum am mai văzut, în acest caz, J_{K_n} coincide cu idealul tuturor minorilor de ordin 2 ai matricei X a cărei rânduri sunt $x_1, \dots, x_n$ și $y_1, \dots, y_n$. Rezoluția lui $I_2(X)$ este cunoscută, anume ea este complexul Eagon-Northcott, dar noi dorim să ne restrângem la a arăta că $\beta_{ij}(S/\text{in}_{<}(J_{K_n})) = \beta_{ij}(S/J_{K_n})$ și în acest caz, fără a folosi complexul.

Vom începe prin a observa că $\text{in}_{<}(J_{K_n}) = (x_i y_j : 1 \leq i < j \leq n)$ are coeficienți lineari dacă ordonăm generatorii săi într-o ordine descrescătoare, relativ la ordinea lexicografică indusă de $x_1 > \dots > x_n > y_1 > \dots > y_n$. Prin urmare, $S/\text{in}_{<}(J_{K_n})$ și, în consecință, S/J_{K_n} are o rezoluție lineară, prin corolarul 1.2.6. Prin remarcă 1.2.4, numerele Betti ale lui S/J_{K_n} și $S/\text{in}_{<}(J_{K_n})$ sunt determinate de seriile lor Hilbert. Dar S/J_{K_n} și $S/\text{in}_{<}(J_{K_n})$ au aceeași serii Hilbert. Deci S/J_{K_n} și $S/\text{in}_{<}(J_{K_n})$ au aceleași numere graduate Betti.

CHAPTER 2

Numere Betti extremale pentru unele clase de ideale muchie binomiale

În [14], autorii emit ipoteza că numerele Betti extremale ale lui J_G și $\text{in}_<(J_G)$ coincid pentru orice graf G . Aici, $<$ semnifică ordonarea lexicografică în $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ indusă de ordinea naturală a variabilelor $x_1 > \dots > x_n > y_1 > \dots > y_n$.

În această secțiune, vom da un răspuns pozitiv la aceasta conjectură pentru cazul când graful G este un graf bipartit complet sau ciclu. În acest sens, folosim unele rezultate demonstrate în [29] și [32] care caracterizează complet rezoluția idealului muchie binomial J_G când G este ciclu sau un graf bipartit complet. În particular, în acest caz, rezultă că J_G are un unic număr Betti extremal. Amintim toate aspectele cunoscute privind rezoluția idealurilor muchie binomiale ale grafurilor bipartite complete și ciclurilor.

Studiem idealul inițial pentru J_G unde G este un graf bipartit sau un ciclu. Aratăm că $\text{proj dim in}_<(J_G) = \text{proj dim } J_G$ și $\text{reg in}_<(J_G) = \text{reg } J_G$, și prin urmare, $\text{in}_<(J_G)$ are un unic număr Betti extremal. În final, arătăm că numărul Betti extremal pentru $\text{in}_<(J_G)$ este egal cu cel al lui J_G .

După cunoștințele noastre, aceasta este prima încercare de a dovedi conjectura considerată în [14] pentru numerele Betti extremale.

În studiul nostru, vom profita de rezultatele cunoscute privind rezoluțiile idealurilor muchie binomiale asociate ciclurilor și grafurilor bipartite complete și de faptul că idealele lor inițiale au proprietăți interesante.

2.1. Ideale muchie binomiale asociate grafurilor bipartite complete

Fie $G = K_{m,n}$ un graf bipartit complet pe mulțimea de noduri $\{1, \dots, m\} \cup \{m+1, \dots, m+n\}$ with $m \geq n \geq 1$ și fie J_G idealul muchie binomial asociat.

J_G este generat de toate binoamele $f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ unde $1 \leq i \leq m$ și $m+1 \leq j \leq m+n$. În [29, Theorem 5.3] se arată că diagrama Betti pentru S/J_G are forma

	0	1	2	$\dots$	p
0	1	0	0	$\dots$	0
1	0	mn	0	$\dots$	0
2	0	0	β_{24}	$\dots$	$\beta_{p,p+2}$

unde $p = \text{proj dim } S/J_G = \begin{cases} m, & \text{if } n = 1, \\ 2m + n - 2, & \text{if } n > 1. \end{cases}$

În particular, din diagrama Betti de mai sus putem citi că S/J_G are un unic numar Betti extremal, și anume $\beta_{p,p+2}$.

În plus, în [29, Theorem 5.4] sunt calculate toate numerele Betti pentru S/J_G . Din moment ce suntem interesați doar de numărul Betti extremal, amintim aici valoarea sa, așa cum a fost dată în [29, Theorem 5.4], și anume, $\beta_{p,p+2} = \begin{cases} m-1, & \text{if } p = m, \\ n-1, & \text{if } p = 2m + n - 2. \end{cases}$

Se poate vedea cu ușurință că drumurile admisibile ale grafului complet $G = K_{m,n}$ sunt doar muchiile lui G , de forma $i, m+k, j$ cu $1 \leq i < j \leq m$, $1 \leq k \leq m$, și drumurile de forma $m+i, k, m+j$ cu $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq m$. Prin urmare, vom obține următoarea consecință la teorema de mai sus.

COROLAR 2.1.1. *Fie $G = K_{m,n}$ un graf bipartit complet cu mulțimea de noduri $V(G) = \{1, \dots, m\} \cup \{m+1, \dots, m+n\}$. Atunci*

$$\text{in}_<(J_G) = (\{x_i y_j\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m+1 \leq j \leq m+n}}, \{x_i x_{m+k} y_j\}_{\substack{1 \leq i < j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}, \{x_{m+1} y_k y_{m+j}\}_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}}).$$

2.2. Ideale muchie binomiale asociate ciclurilor

În această secțiune, G semnifică un n -ciclu pe mulțimea de noduri $[n]$ cu muchiile $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{1, n\}$.

În [32] s-a demonstrat că diagrama Betti pentru S/J_G are forma

	0	1	2	3	...	n
0	1	0	0	0	...	0
1	0	n	0	0	...	0
2	0	0	β_{24}	0	...	0
3	0	0	0	β_{36}	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$	0	0	$\beta_{2,n}$	$\beta_{3,n+1}$	...	$\beta_{n,2n-2}$

și s-au calculat toate numere Betti.

Se vede că avem un unic număr Betti extremal și, din [32], avem $\beta_{n,2n-2} = \binom{n-1}{2} - 1$.

Acum ne uităm la idealul inițial al lui J_G .

Este evident din definiția 1.4.9 și din etichetarea nodurilor lui G că drumurile admisibile sunt muchiile lui G și drumurile de forma $i, i-1, \dots, 1, n, n-1, \dots, j+1$ cu $2 \leq j-i \leq n-2$.

Prin urmare, vom obține următorul sistem de generatori pentru idealul inițial al lui J_G .

COROLAR 2.2.1. *Fie G un n -ciclu cu etichetarea naturală a nodurilor sale. Atunci*

$$\text{in}_<(J_G) = (x_1y_2, \dots, x_{n-1}y_n, x_1y_n, \{x_i x_{j+1} \cdots x_n y_1 \cdots y_{i-1} y_j\}_{2 \leq j-i \leq n-2}).$$

2.3. Numere Betti extremale pentru grafurile bipartite

Fie $G = K_{m,n}$ un graf bipartit complet cu mulțimea de noduri $\{1, \dots, m\} \cup \{m+1, \dots, m+n\}$ cu $m \geq n \geq 1$ și fie J_G idealul muchie binomial asociat. Idealul inițial $\text{in}_<(J_G)$ are o proprietate interesantă care este stabilită în propoziția următoare.

PROPOZIȚIE 2.3.1. *Fie $G = K_{m,n}$ un graf complet. Atunci $\text{in}_<(J_G)$ are câaturi liniare.*

TEOREMA 2.3.2. *Fie $G = K_{m,n}$ un graf complet. Atunci*

$$\beta_{t,t+2}(\text{in}_<(J_G)) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m+1 \leq j \leq m+n}} \binom{i+j-m-2}{t},$$

$$\beta_{t,t+3}(\text{in}_<(J_G)) = \begin{cases} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} \binom{n+k+j-3}{t}, & \text{if } n = 1, \\ \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} \binom{n+k+j-3}{t} + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} \binom{m+k+j-3}{t}, & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

În particular, din teorema de mai sus, rezultă următorul corolar care arată că pentru $G = K_{m,n}$ numerele Betti extremale ale lui S/J_G și $S/\text{in}_<(J_G)$ coincid.

COROLAR 2.3.3. *Fie $G = K_{m,n}$ un graf complet. Atunci:*

$$(a) \text{proj dim}(S/\text{in}_<(J_G)) = \text{proj dim}(\text{in}_<(J_G)) + 1 = \begin{cases} m, & \text{if } n = 1, \\ 2m + n - 2, & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

(b) $S/\text{in}_<(J_G)$ are un unic numar Betti extremal, și anume

$$\beta_{p,p+2}(S/\text{in}_<(J_G)) = \beta_{p-1,p+2}(\text{in}_<(J_G)) = \begin{cases} m - 1, & \text{if } n = 1, \\ n - 1, & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

2.4. Numere Betti extremale asociate ciclurilor

În această secțiune, graful G este un n -ciclu. Dacă $n = 3$, atunci G este un graf complet, prin urmare idealele J_G și $\text{in}_<(J_G)$ au aceleași numere graduate Betti. Astfel, în continuare, putem considera $n \geq 4$.

Așa cum am văzut deja Corollary 2.2.1, $\text{in}_<(J_G)$ este minimal generat de monoamele inițiale ale binoamelor corespunzătoare muchiilor lui G și de $m = n(n-3)/2$ monoame de grad ≥ 3 care ne indică $v_1, \dots, v_m$ în cazul în care vom presupune că dacă $i < j$, atunci fie $\deg v_i < \deg v_j$ sau $\deg v_i = \deg v_j$ și $v_i > v_j$. Să observăm că dacă $v_k = x_i x_{j+1} \cdots x_n y_1 \cdots y_{i-1} y_j$, avem $\deg v_k = n - j + i + 1$.

Prin urmare, există două monoame de grad 3, și anume, $v_1 = x_1 x_n y_{n-1}$ și $v_2 = x_2 y_1 y_n$, trei monoame de grad 4, și anume, $v_3 = x_1 x_{n-1} x_n y_{n-2}$, $v_4 = x_1 x_n y_1 y_{n-1}$, $v_5 = x_1 y_1 y_2 y_n$, etc.

Vom introduce următoarea notație. Stabilim $J = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{n-1} y_n)$, $I = J + (x_1 y_n)$, și, pentru $1 \leq k \leq m$, $I_k = I_{k-1} + (v_k)$, cu $I_0 = I$. Prin urmare, $I_m = \text{in}_<(J_G)$.

LEMA 2.4.1. *Idealele cât $J : (x_1 y_n)$ și $I_{k-1} : (v_k)$, pentru $k \geq 1$, sunt minimal generate de secvențe regulate de monoame, de lungime $n - 1$.*

OBSERVAȚIE 2.4.2. Din lema de mai sus, reținem că, dacă $v_k = x_i x_{j+1} \cdots x_n y_1 \cdots y_{i-1} y_j$, atunci șirul regulat de monoame care generează $I_{k-1} : (v_k)$ conține $j - i - 2$ monoame de grad 2 și $n - j + i + 1$ variabile.

În următoarea lemă vom calcula dimensiunea proiectivă și regularitatea pentru S/I .

Aceasta ne va fi util pentru studiul inductiv al invariantilor lui S/I_k .

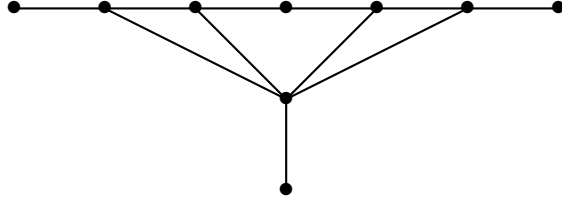
LEMA 2.4.3. *Avem $\text{proj dim } S/I = n - 1$ și $\text{reg } S/I = n - 2$.*

LEMA 2.4.4. Pentru $1 \leq k \leq m$, avem $\text{proj dim } S/I_k \leq n$ și $\text{reg } S/I_k \leq n - 2$.

PROPOZIȚIE 2.4.5. $\text{proj dim } S/\text{in}_<(J_G) = n$ și $\text{reg } S/\text{in}_<(J_G) = n - 2$.

TEOREMA 2.4.6. Fie G un ciclu. Atunci $S/\text{in}_<(J_G)$ și S/J_G au același număr Betti extremal, și anume $\beta_{n,2n-2}(S/J_G) = \beta_{n,2n-2}(S/\text{in}_<(J_G)) = \binom{n-1}{2} - 1$.

OBSERVAȚIE 2.4.7. Există exemple de grafuri, pentru care idealul muchie asociat are mai multe numere Betti extremale. De exemplu, graful G afișat mai jos are două numere Betti care sunt egale cu numerele Betti extremale pentru $\text{in}_<(J_G)$.



CHAPTER 3

Asupra idealelor binomiale muchie asociate grafurilor bloc

În acest capitol studiem proprietățile omologice pentru unele clase de ideale muchie binomiale.

Fie G un graf simplu pe mulțimea de noduri $[n]$ și fie $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ inelul polinoamelor în $2n$ variabile peste un corp K . Aratăm că dacă G este un graf bloc, $\text{depth}(S/J_G) = \text{depth}(S/\text{in}_<(J_G))$.

De asemenea aratăm o egalitate similară pentru regularitate, și anume $\text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_<(J_G)) = \ell$ dacă G este C_ℓ -graf.

Grafurile C_ℓ constituie o subclasă a grafurilor bloc. În [21] s-a arătat că, pentru orice graf conex G pe mulțimea de noduri $[n]$, avem

$$\ell \leq \text{reg}(S/J_G) \leq n - 1,$$

unde ℓ este lungimea celui mai lung drum al lui G .

Principala motivație a lucrării noastre a fost să răspundă la următoarea întrebare.

Putem să caracterizăm grafurile conexe G pentru care cel mai lung drum indus are lungimea ℓ și $\text{reg}(S/J_G) = \ell$?

Am reușit să răspundem la această întrebare pentru arbori. Arătăm că dacă T este un arbore pentru care cel mai lung drum indus are lungimea ℓ , atunci $\text{reg}(S/J_T) = \ell$ dacă și numai dacă T este 'caterpillar'.

Un arbore 'caterpillar' este un arbore T cu proprietatea că acesta conține un drum P astfel că orice nod al lui T este fie un nod al lui P fie este adiacent la un nod al lui P .

În [22], au fost introduse așa numitele grafuri slab închise. Acesta este o clasă de grafuri care includ grafurile închise. În lucrarea citată, s-a demonstrat că un arbore este 'caterpillar' dacă și numai dacă este un graf slab închis.

Având în vedere teorema Theorem 3.2.1 și teorema 3.2 în [16] care afirmă că $\text{reg}(S/J_G) = \ell$ dacă G este un graf închis conex pentru care cel mai lung drum indus are lungimea ℓ , și pe baza unor experimente de calculator, suntem tentați să formulăm următoarele.

CONJECTURE 3.0.8. *Dacă G este un graf închis slab conex pentru care cel mai lung drum indus are lungimea ℓ , atunci $\text{reg}(S/J_G) = \ell$.*

Amintim la început câteva definiții de bază din teoria grafurilor.

Un nod i al lui G a cărui ștergere din graf dă un graf cu mai multe componente conexe decât G se numește *punct de tăietură* al lui G . Un graf *cordal* este un graf fără cicluri de lungime mai mare sau egal cu 4.

Clica unui graf G este un subgraf complet al lui G . Clicile unui graf G formează un complex simplicial, $\Delta(G)$, care se numește *complex clică* al lui G . Fațetele acestuia sunt clicile maximale ale lui G .

Un graf G este un *graf bloc* dacă și numai dacă este cordal și fiecare două clici maximale au cel mult un nod în comun.

Complexul clică $\Delta(G)$ al unui graf cordal G are proprietatea că există o *ordine frunză* pe fațetele sale. Aceasta înseamnă că fațetele lui $\Delta(G)$ pot fi ordonate astfel $F_1, \dots, F_r$ astfel încât, pentru fiecare $i > 1$, F_i este o frunză a complexului simplicial generat de $F_1, \dots, F_i$.

O *frunză* F a complexului simplicial Δ este o fațetă pentru Δ cu proprietatea că există o altă fațetă a lui Δ , să zicem G , astfel încât, pentru orice fațetă $H \neq F$ a lui Δ , $H \cap F \subseteq G \cap F$.

3.1. Ideale inițiale pentru ideale muchie binomiale asociate grafurilor bloc

În această secțiune, la început demonstrăm că, pentru un graf bloc G pe $[n]$ cu c componente conexe avem $\text{depth}(S/J_G) = \text{depth}(S/\text{in}_<(J_G)) = n + c$, unde $<$ semnifică ordonarea lexicografică indusă de $x_1 > \dots > x_n > y_1 > \dots > y_n$ în inelul $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$.

Vom începe cu următoarea leamnă.

LEMA 3.1.1. *Fie G un graf pe mulțimea de noduri $[n]$ și fie $i \in [n]$. Atunci*

$$\text{in}_<(J_G, x_i, y_i) = (\text{in}_<(J_G), x_i, y_i).$$

TEOREMA 3.1.2. Fie G un graf bloc și fie c numărul de componente conexe ale lui G . Atunci

$$\text{depth}(S/J_G) = \text{depth}(S/\text{in}_<(J_G)) = n + c.$$

Fie G un graf conex pe mulțimea de noduri $[n]$ care constă în

- (i) un șir de cliци maximale $F_1, \dots, F_\ell$ cu $\dim F_i \geq 1$ pentru i astfel încât $|F_i \cap F_{i+1}| = 1$ pentru $1 \leq i \leq \ell - 1$ și $F_i \cap F_j = \emptyset$ pentru orice $i < j$ astfel încât $j \neq i + 1$, împreună cu
- (ii) câteva muchii adiționale de forma $F = \{j, k\}$ unde j este un punct de intersecție a doua cliци consecutive F_i, F_{i+1} pentru unele $1 \leq i \leq \ell - 1$, și k este un nod de grad 1.

Cu alte cuvinte, G este obținut dintr-un graf H cu $\Delta(H) = \langle F_1, \dots, F_\ell \rangle$ a cărui ideal muchie binomial este Cohen-Macaulay (vezi [14, Theorem 3.1]) prin atașarea de muchii în punctele de intersecție ale fațetelor lui $\Delta(H)$.

Prin urmare, G arată ca graful afișat în Figure 3.1.

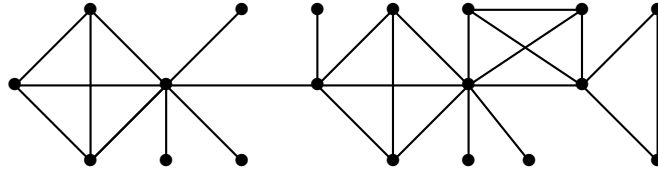


FIGURA 3.1. C_ℓ -graph

Un astfel de graf are, evident, proprietatea că drumul său indus cel mai lung are lungimea egală cu ℓ . Dacă un graf conex G satisface condițiile de mai sus (i) și (ii), spunem că G este un $\mathcal{C}_\ell$ -graf. În cazul în care $\dim F_i = 1$ pentru $1 \leq i \leq \ell$, atunci G se numește *graf 'caterpillar'*.

Vom reține de asemenea că orice $\mathcal{C}_\ell$ -graf este cordal și are proprietatea că oricare două cliци maximale distincte se intersectează în cel mult un nod. Deci, un C_ℓ -graf este un graf bloc conex.

TEOREMA 3.1.3. Fie G un $\mathcal{C}_\ell$ -graf pe mulțimea de noduri $[n]$. Atunci

$$\text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_<(J_G)) = \ell.$$

EXEMPLU 3.1.4. Pentru graful G din Figure 3.1 obținem $\text{reg}(S/J_G) = 5$.

3.2. Ideale muchie binomiale asociate arborilor 'caterpillar'

Matsuda și Murai au demonstrat în [20] că, pentru orice graf conex G pe mulțimea de noduri $[n]$, avem $\ell \leq \text{reg}(S/J_G) \leq n - 1$, unde ℓ reprezintă lungimea celui mai lung drum indus al lui G , și au emis ipoteza că $\text{reg}(S/J_G) = n - 1$ dacă și numai dacă T este un graf linie.

Mai multe lucrări recente sunt preocupate de aceasta conjectură; vezi, de exemplu, [16], [25], și [27].

Se poate întreba cum se caracterizează grafurile conexe pentru care cel mai lung drum indus are lungimea ℓ și $\text{reg}(S/J_G) = \ell$.

În această secțiune, vom răspunde la această întrebare, pentru cazul arborilor.

Un arbore 'caterpillar' este un arbore T cu proprietatea că acesta conține un drum P astfel încât orice nod al lui T este fie un nod al lui P sau adiacent la un nod al lui P . În mod clar, orice arbore 'caterpillar' este un $\mathcal{C}_\ell$ -graf pentru un întreg pozitiv ℓ .

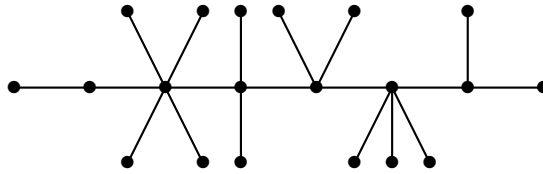


FIGURA 3.2. Caterpillar

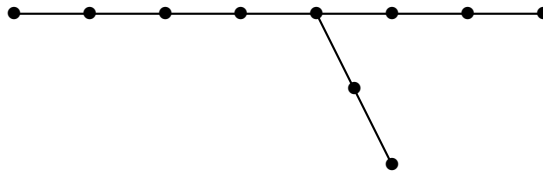


FIGURA 3.3. Induced graph H

Arborii 'caterpillar' au fost studiați pentru prima oară de Harary și Schwenk [17]. Aceste grafuri au aplicații în chimie și fizică [12]. În Figure 3.2, este afișat un exemplu de arbore 'caterpillar'.

Rețineți că orice arbore 'caterpillar' este un graf îngust în sensul dat de Cox și Erskine [5].

Reciproc, se poate observa ușor că orice arbore îngust este un arbore 'caterpillar'.

În plus, după cum s-a observat în [21], un arbore este un graf 'caterpillar' dacă și numai dacă este slab închis în sensul definiției date în [21].

În următoarea teoremă, caracterizăm arborii T cu $\text{reg}(S/J_T) = \ell$ unde ℓ este lungimea drumului celui mai lung indus al lui T .

TEOREMA 3.2.1. *Fie T un arbore pe mulțimea de noduri $[n]$ pentru care drumul cel mai lung indus P are lungimea ℓ . Atunci $\text{reg}(S/J_T) = \ell$ dacă și numai dacă T este 'caterpillar'.*

CHAPTER 4

Idealele binomiale muchie și scrol normal rațional

Fie K un corp și $S = K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ inelul polinoamelor în $n + 1$ variabile K . Minorii de ordinul 2 ai matricei

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} \end{pmatrix}$$

generează idealul I_X pentru curba normală rațională $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$. Este bine cunoscut că S/I_X este Cohen-Macaulay și are o rezoluție S -liniară.

Recomandăm cititorului referințele [10], [4], [1] pentru proprietățile idealului asociat unui scrol normal rațional.

Pe de altă parte, în ultimii ani, idealele muchie binomiale au fost intensiv studiate.

În analogie cu construcția idealelor muchie binomiale clasice, în această lucrare considerăm următoarele ideale în S . Pentru un graf simplu G pe mulțimea de noduri $[n]$, fie I_G idealul generat de minorii de ordinul 2, $g_{ij} = x_i x_{j+1} - x_j x_{i+1}$ pentru X cu $i < j$ și $\{i, j\} \in E(G)$.

Denumim I_G *idealul muchie binomial pentru X* .

Este clar de la început că spre deosebire de cazul clasic al idealelor muchie binomiale, idealul I_G depinde puternic de etichetarea grafului G . De exemplu, dacă G este graful afișat în Figure 4.1, obținem $\dim(S/I_G) = 3$ pentru etichetarea în Figure 4.2 (a) și $\dim(S/I_G) = 4$ pentru etichetarea lui G dată în Figure 4.2 (b).

Totuși, pentru unele clase de grafuri G care admit o etichetare naturală, putem să asociem lui G un unic ideal I_G și să-i studiem proprietățile. Acesta este cazul, de exemplu, pentru grafurile închise.

Reamintim din [19] că G este închis dacă are o etichetare în raport cu care este închis.

Un graf G se numește închis în raport cu o etichetare dată dacă pentru toate muchiile $\{i, j\}$ și $\{i, k\}$ cu $j > i < k$ sau $j < i > k$, avem $\{j, k\} \in E(G)$.

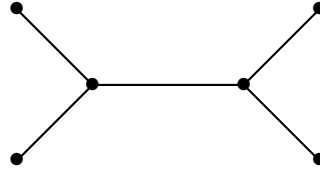


FIGURA 4.1

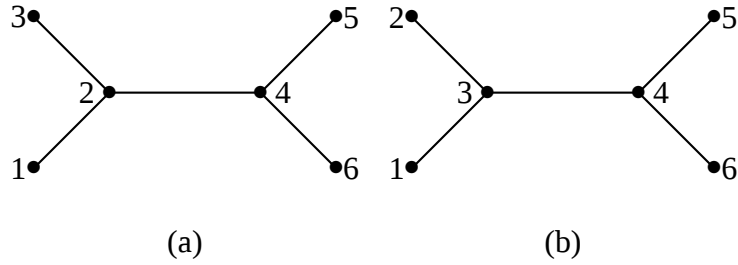


FIGURA 4.2

Un graf închis G este cordal și, prin urmare, din teorema Dirac, complexul clac $\Delta(G)$ este o cvasi-pădure.

$\Delta(G)$ este o cvasi-pădure dacă fațetele $F_1, \dots, F_r$ of $\Delta(G)$ au o ordonare frunză.

S-a demonstrat în [14] că dacă G este închis, atunci putem eticheta nodurile lui G astfel încât fațetele lui $\Delta(G)$, să zicem $F_1, \dots, F_r$, să fie intervale, $F_i = [a_i, b_i] \subset [n]$ și dacă ordonăm $F_1, \dots, F_r$ astfel încât $a_1 < a_2 < \dots < a_r$, atunci aceasta este o ordonare frunză.

În continuare, acest capitol este structurat după cum urmează.

În Section 4.1, arătăm că dacă generatorii I_G formează o bază Gröbner în raport cu ordinea invers lexicografică dacă și numai dacă G este închis cu etichetarea dată.

Ca o consecință a acestei teoreme, deducem că pentru un graf închis G , idealul I_G este Cohen-Macaulay de dimensiune $1 + c$, unde c este numărul de componente conexe ale lui G .

În Section 4.2, studiem proprietățile lui I_G pentru un graf închis G . Calculăm idealele prime minimale ale lui I_G în Theorem 4.2.2. Folosind această teoremă, caracterizăm aceste grafuri închise conexe G pentru care I_G este un ideal radical (Proposition 4.2.3). Suplimentar, arătăm în Corollary 4.2.4,

că I_G este intersecție completă dacă G este conectat și închis. În ultima parte, la Section 4.2, dăm o margine superioară pentru regularitatea lui I_G (Theorem 4.2.7) și demonstrăm că I_G are o rezoluție liniară dacă și numai dacă G este un graf complet.

4.1. Baze Gröbner

Fie G un graf pe mulțimea de noduri $[n]$ și $I_G \subset S = K[x_1, \dots, x_n]$ idealul său asociat. Rezultatul principal al acestei secțiuni este următorul.

TEOREMA 4.1.1. *Generatorii lui I_G formează o bază Gröbner redusă a lui I_G în raport cu ordonarea invers lexicografică indusă de $x_1 > \dots > x_n > x_{n+1}$ dacă și numai dacă G este închis în raport cu etichetarea sa.*

La fel ca în cazul idealelor muchie binomiale clasice asociate grafurilor, idealul I_G unde G este graful linie pe n noduri are proprietăți interesante.

Fie G un graf linie pe $[n]$ cu $E(G) = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\}$. Atunci I_G este minimal generat de $\{g_{i,i+1} = x_{i+1}^2 - x_i x_{i+2} : 1 \leq i \leq n\}$ și $\text{in}_{\text{rev}}(I_G) = (x_2^2, x_3^2, \dots, x_n^2)$. As $x_2^2, x_3^2, \dots, x_n^2$ este o secvență regulată în S , rezultă că generatorii lui I_G formează de asemenea o secvență regulată. Prin urmare, complexul Koszul al generatorilor lui I_G furnizează rezoluția liberă minimală pentru S/I_G peste S .

Propoziția următoare arată că, pentru un graf închis G , idealul inițial al lui I_G în raport cu ordonarea invers lexicografică are o structura simplă.

PROPOZIȚIE 4.1.2. *Fie G un graf închis pe $[n]$ cu $\Delta(G) = \langle F_1, \dots, F_r \rangle$ unde $F_i = [a_i, b_i]$ pentru $1 \leq i \leq r$, și $1 = a_1 < \dots < a_r < b_r = n$. Atunci $\text{in}_{\text{rev}}(I_G)$ este un ideal monomial primar, prin urmare este Cohen-Macaulay.*

COROLAR 4.1.3. *Fie G un graf închis. Atunci I_G este un ideal Cohen-Macaulay cu $\dim(S/I_G) = 1 + c$ unde c este numărul de componente conexe pentru G .*

4.2. Proprietăți ale idealelor muchie binomiale scrol asociate grafurilor închise

În această secțiune studiem câteva proprietăți algebrice și omologice ale idealului I_G unde G este un graf închis pe mulțimea de noduri $[n]$.

4.2.1. Ideale prime asociate grafurilor. Reamintim că I_X semnifică idealul muchie binomial asociat grafului complet K_n . Este cunoscut că I_X este un ideal prim.

PROPOZIȚIE 4.2.1. *Fie G un graf arbitrar conectat pe mulțimea de noduri $[n]$. Atunci I_X este un ideal prim minimal al lui I_G . Dacă P este un ideal prim minimal al lui I_G care nu conține variabile, atunci $P = I_X$.*

În continuare ne concentrăm studiul pe idealele asociate cu grafurile închise conexe.

TEOREMA 4.2.2. *Fie $G \neq K_n$ un graf închis conex pe mulțimea de noduri $[n]$ și I_G idealul asociat. Atunci*

$$\text{Ass}(S/I_G) = \text{Min}(I_G) = \{I_X, (x_2, \dots, x_n)\}.$$

Ca o consecință la teorema de mai sus, putem caracteriza idealul radical I_G .

PROPOZIȚIE 4.2.3. *Fie G un graf închis conex pe mulțimea de noduri $[n]$. Atunci I_G este un ideal radical dacă și numai dacă $G = K_n$ sau $\Delta(G) = \langle [1, n-1], [2, n] \rangle$.*

Theorem 4.2.2 are următoarea consecință interesantă.

COROLAR 4.2.4. *Fie G un graf închis conex. Atunci I_G este intersecție completă.*

4.2.2. Regularitate. Fie G un graf închis pe mulțimea de noduri $[n]$ și $I_G \subset S$ idealul asociat. Prima întrebare este sub care condiții pentru graful G idealul I_G are o rezoluție liniară.

Propoziția următoare răspunde la această întrebare. Avem nevoie în primul rand de următoarea afirmație.

LEMA 4.2.5. [3, Exercise 4.1.17 (c)] *Fie $R = K[x_1, \dots, x_n]/I$ un inel omogen Cohen-Macaulay. Inelul R are o rezoluție m -liniară dacă și numai dacă $I_j = 0$ pentru $j < m$ și $\dim_K I_m = \binom{m+g-1}{m}$ unde $g = \text{height } I$.*

PROPOZIȚIE 4.2.6. *Fie G un graf închis pe $[n]$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (a) G este un graf complet;
- (b) I_G are o rezoluție liniară;
- (c) Toate puterile lui I_G au o rezoluție liniară.

Teorema următoare dă o margine superioară pentru regularitatea lui I_G când G este un graf închis.

TEOREMA 4.2.7. *Fie G un graf închis pe mulțimea de noduri $[n]$. Atunci $\text{reg}(S/I_G) \leq r$ unde r este numărul de cliici maxime ale lui G .*

OBSERVAȚIE 4.2.8. Marginea superioară din teorema de mai sus este strictă.

În adevăr, fie G un graf închis cu cliicile maxime $F_i = [a_i, a_{i+1}]$ unde $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_r < a_{r+1} = n$. În acest caz, avem

$$\text{in}_{\text{rev}}(I_G) = (x_2, \dots, x_{a_2})^2 + (x_{a_2+1}, \dots, x_{a_3})^2 + \dots + (x_{a_r+1}, \dots, x_n)^2.$$

Prin urmare,

$$S/(\text{in}_{\text{rev}}(I_G), x_1, x_{n+1}) \cong (S_1/(x_2, \dots, x_{a_2})^2) \otimes_K \dots \otimes_K (S_r/(x_{a_r+1}, \dots, x_n)^2)$$

unde $S_i = K[x_{a_i+1}, \dots, x_{a_{i+1}}]$ pentru toți i , ceea ce implică

$$H_{S/(\text{in}_{\text{rev}}(I_G), x_1, x_{n+1})}(t) = \prod_{i=1}^r (1 + (a_{i+1} - a_i)t).$$

Aceasta arată că $\text{reg}(S/I_G) = r$.

Din Proposition 4.2.6 și Theorem 4.2.7, deducem următoarea consecință.

COROLAR 4.2.9. *Fie G un graf închis cu două cliici maxime. Atunci $\text{reg}(S/I_G) = 2$.*

Exemplul următor arată că inegalitatea dată în Theorem 4.2.7 este strictă.

EXEMPLU 4.2.10. Fie G un graf închis pe mulțimea de noduri $[6]$ cu cliicile maxime $F_1 = [1, 4]$, $F_2 = [3, 5]$, și $F_3 = [4, 6]$. Avem $\text{reg}(S/I_G) = 2 < 3$.

Concluzii și dezvoltări ulterioare

În rezumat, principalele rezultate ale tezei sunt următoarele.

1. Am arătat că, dacă G este un graf complet bipartit sau ciclu, atunci idealul binomial asociat J_G și idealul său inițial $\text{in}_<(J_G)$ în raport cu ordonarea lexicografică în $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ au aceleași numere Betti extremale.
2. Dacă G este un graf bloc pe mulțimea de noduri $[n]$, atunci $\text{depth}(S/J_G) = \text{depth}(S/\text{in}_<(J_G)) = n + c$ unde c este numărul de componente conexe pentru G .
3. Dacă G este un C_ℓ -graf, atunci $\text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_<(J_G)) = \ell$. În particular, rezultă ca idealul binomial muchie al grafului C_ℓ are o regularitate minimală.
4. Am caracterizat arborii pentru care idealele binomiale muchie au regularitate minimală.
5. Am introdus idealele binomiale muchie ale grafurilor închise asociate cu scroluri și am studiat mai multe proprietăți algebrice și omologice ale lor.

Idealele binomiale muchie au fost intensiv studiate în ultimii 5 ani.

Intentionăm să continuăm cercetările pe această temă cu o focalizare specială pe conjectura lui Matsuda și Murai [20] care stabilește că, pentru un graf G pe mulțimea de noduri $[n]$, avem $\text{reg}(S/J_G) = n - 1$ dacă și numai dacă G este un graf linie.

Această conjectură a fost demonstrată pentru grafurile bloc în [16]. În particular, rezultă că această conjectură este valabilă pentru arbori.

O altă problemă interesantă este rezolvarea conjecturii pentru idealele binomiale muchie cu regularitate minimală, pe care am propus-o în [8].

În plus, am dori să extindem cercetarea asupra idealelor binomiale muchie asociate cu scroluri. De exemplu, o direcție este să generalizăm construcția noastră la perechea de grafuri pentru matricea Hankel de tip arbitrar urmărind ideile din lucrarea [15].

Bibliografie

- [1] L. Bădescu, G. Valla, *Grothendieck-Lefschetz theory, set-theoretic complete intersections and rational normal scrolls*, J. Algebra, **324** (2010), 1636–1655.
- [2] W. Bruns, A. Conca, M. Varbaro, *Maximal minors and linear powers*, to appear in J. Reine Angew. Math.
- [3] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Revised Ed., Cambridge University Press, 1998.
- [4] A. Conca, *Hilbert function and resolution of the powers of the ideal of the rational normal curve*, J. Pure Appl. Algebra, **152** (2000), 65–74.
- [5] D. A. Cox, A. Erskine, *On closed graphs*, arXiv:1306.5149.
- [6] A. Conca, *Gorenstein ladder determinantal rings*, J. London Math. Soc. **54**(3) (1996), 453–474.
- [7] F. Chaudhry, A. Dokuyucu, V. Ene, *Binomial edge ideals and rational normal scrolls*, arXiv:1404.7602, to appear in Bull. Iranian Math. Soc.
- [8] F. Chaudhry, A. Dokuyucu, R. Irfan, *On the binomial edge ideals of block graphs*, arXiv:1402.2041, submitted.
- [9] A. Dokuyucu, *Extremal Betti numbers of some classes of binomial edge ideals*, arXiv:1310.2903, submitted to Math. Reports.
- [10] D. Eisenbud, *The geometry of syzygies: A second course in commutative algebra and algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **229** Springer-Verlag, New York, 2005.
- [11] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlag, 1995.
- [12] S. El-Basil, *Applications of caterpillar trees in chemistry and physics*, J. Math. Chem. **1**(2) (1987), 153–174.
- [13] V. Ene, J. Herzog, *Gröbner bases in Commutative Algebra*, Graduate Studies in Mathematics **130**, American Mathematical Society, 2011.
- [14] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Cohen-Macaulay binomial edge ideals*, Nagoya Math. J. **204** (2011), 57–68.
- [15] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, A. A. Qureshi, *The binomial edge ideal of a pair of graphs*, Nagoya Math. J. **213** (2014), 105–125.

- [16] V. Ene, A. Zarojanu, *On the regularity of binomial edge ideals*, Math. Nachr., DOI: 10.1002/mana.201300186
- [17] F. Harary, A. J. Schwenk, *The number of caterpillars*, Discrete Math. **6**(4), (1973), 359–365.
- [18] J. Herzog, T. Hibi, *Monomial Ideals*, Graduate Texts in Mathematics **260**, Springer, 2010.
- [19] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdotir, T. Kahle, J. Rauh, *Binomial edge ideals and conditional independence statements*, Adv. Appl. Math. **45** (2010), 317–333.
- [20] K. Matsuda, S. Murai, *Regularity bounds for binomial edge ideals*, J. Commut. Algebra **5** (2013), 141–149.
- [21] K. Matsuda, *Weakly closed graphs and F -purity of binomial edge ideals*, arXiv: 1209.4300.
- [22] M. Ohtani, *Graphs and Ideals generated by some 2-minors*, Commun. Algebra **39** (2011), no. 3, 905–917.
- [23] A. Rauf, G. Rinaldo, *Construction of Cohen-Macaulay binomial edge ideals*, to appear in Commun Algebra.
- [24] J. Rauh, *Generalized binomial edge ideals*, Adv. Appl. Math., **50**(3) (2013), 409–414.
- [25] S. Saeedi Madani, D. Kiani, *Binomial edge ideals of graphs*, Electron. J. Combin, **19** (2012), no. 2, # P44.
- [26] S. Saeedi Madani, D. Kiani, *On the binomial edge ideal of a pair of graphs*, Electron. J. Combin, **20** (2013), no. 1, # P48.
- [27] S. Saeedi Madani, D. Kiani, *The regularity of binomial edge ideals of graphs*, arXiv: 1310.6126.
- [28] I. Swanson, A. Taylor, *Minimal primes of ideals arising from conditional independence statements*, J. Algebra **392** (2013), 299–314.
- [29] P. Schenzel, S. Zafar, *Algebraic properties of the binomial edge ideal of a complete bipartite graph*, to appear in An. St. Univ. Ovidius Constanta, Ser. Mat.
- [30] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, (2000).
- [31] S. Zafar, *On approximately Cohen-Macaulay binomial edge ideal*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, Tome **55**(103) (2012) No. 4, 429–442.
- [32] S. Zafar, Z. Zahid, *On the Betti numbers of some classes of binomial edge ideals*, Electron. J. Combin. **20** (2013) no. 4, # P37.